

बीजगणित

त्याचें मूळपुस्तक इंग्रजी भाषेंत आहे,
त्याचें भाषांतर,
पूर्वी क्वापतन जार्ज जार्विससाहेबत्यांनी
महाराष्ट्र भाषेंत केलें,
त्या भाषांतराचीही पुनरारुत्ति
पुणे पाठशाळेकडील छापरवान्यांत छापिली.

मुकामपुणे

छापणारनारोरामचंद्र ठकारसु. छा.

इसवीसंन १८५६

शके १७७८

बीजगणिताची अनुक्रमणिका.

| | पृष्ठ |
|----------------------------------|-------|
| व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी. | १ |
| मिळवणी. _____ | १३ |
| वजाबाकी. _____ | २० |
| गुणाकार. _____ | २३ |
| भागाकार. _____ | २९ |
| अपूर्णबीज. _____ | ३८ |
| वर्गघनादि. _____ | ५५ |
| वर्गादिमूळ. _____ | ६४ |
| करणी. _____ | ७२ |
| गणितप्रमाण आणि श्रेढी. _____ | १०६ |
| गोळ्यांचे राशींचें गणित. _____ | ११४ |
| भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी. _____ | १२३ |
| अनंतश्रेणी. _____ | १२८ |
| एकवर्णसमीकरण. _____ | १५६ |
| वर्गसमीकरण. _____ | २०७ |
| घनादिसमीकरण. _____ | २३१ |
| सरळव्याज. _____ | २५१ |

| | |
|----------------|-----|
| नक्रवाटव्याज . | २५७ |
| प्राप्ति . | २६० |

बीजगणित

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी.

१ बीजगणित म्हणजे हरेक संख्यांचे अंकांचाचून अक्षरचिन्हं करूनच गणित करण्याची विद्या . ही गणित करण्याची सामान्य रीति आहे .

२ त्या विद्येमध्ये सर्व पदार्थजातींचे संख्यांचे स्थानी अक्षरं योजितात; त्या संगतीं जीं कामें करावयाचीं आहेत, जसें मिळवणी, वजाबाकी इत्यादिक, तीं सर्व कितीएक स्वल्परूप कार्यप्रकाशक चिन्हें करून होतात .

३ बीजगणिताचे उदाहरणांमध्ये कितीएक पदें व्यक्त, म्हणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं आहेत, ज्यांस भास्कराचार्यांचे बीजगणितांत रूप म्हटलें आहे; आणि जीं दुसरीं पदें अव्यक्त, म्हणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं नाहीत, त्यांस त्याच आचार्यांचे बीजगणितांत यावतू तावतू इत्यादिक नांवें दिलीं आहेत. इंग्रजी रीतींत व्यक्त संख्या दाखवावयास मूळ लिपीचे आरंभाचीं अ ब क इत्यादिक अक्षरें घेतात; आणि अव्यक्त संख्या दाखवावयास मूळ लिपी-

चे शेषटील क्षयज्ञ इत्यादिक अक्षरें घेतात .

४ कामें दाखविणारीं जीं चिन्हें आहेत त्यांस कार्यप्रकाशक चिन्हें म्हणतात ; तीं लिहितों .

+ हें चिन्ह मिळवणी दाखवितें , त्या ठिकाणीं अधिकअसें म्हणतात , त्यास धनचिन्ह म्हणावें .

— हें चिन्ह वजावाकी दाखवितें , त्या ठिकाणीं उणें असें म्हणतात , त्यास ऋणचिन्ह म्हणावें ;

X हें अथवा ० हें चिन्ह गुणाकार दाखवितें , त्या ठिकाणीं गुणिलें असें म्हणतात . ज्या संख्याप्रकाशक अक्षरांचा गुणाकार करावयाचा आहे तीं अक्षरें चिन्हावांचूनच जवळ जवळ लिहिलीं असतां त्यांचा परस्पर गुणाकार आहे असें समजावें .

÷ हें चिन्ह भागाकार दाखवितें , त्या ठिकाणीं भागिलें असें म्हणतात .

√ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखवितें ; ३ हें चिन्ह घनमूळ दाखवितें ; ५ हें चिन्ह चतुर्घातमूळ दाखवितें ; त्याप्रमाणें पुढें हीं आणि ३ हें चिन्ह नसंख्याघातमूळ दाखवितें .

: :: : हें चिन्ह राशि अथवा प्रमाण दाखवितें .

= हें चिन्ह बरोबरी दाखवितें , त्या ठिकाणीं बरोबर असें

म्हणतात , अथवा म्हणजे असा शब्द बोलतात .

आतां वर सांगितलेले चिन्हांनीं उदाहरणें लिहितों .

अ + ब हें दाखवितें कीं , बचे संख्येस अची संख्या मिळवावी .

अ-ब त्यांतील चिन्ह दाखवितें कीं , अचे संख्येंतून बची संख्या वजा करावी .

अ ~ ब हें चिन्ह अ आणि ब त्या दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवितें , परंतु त्या दोन संख्यांत लहान कोणती आणि मोठी कोणती हें विदित नाही .

अब अथवा अxब किंवा अ•ब हें चिन्ह अ आणि ब त्या दोन संख्यांचा गुणाकार दाखवितें .

अ ÷ ब अथवा $\frac{अ}{ब}$ हें चिन्ह दाखवितें कीं , अची संख्या बचे संख्येनें भागावी .

अ : ब : : क : ड हें दाखवितें कीं , जसें अ प्रमाण ब ला होतें तसें क प्रमाण ड ला होतें .

क्ष = अ - ब + क हें समीकरण आहे ; तें दाखवितें कीं , अ आणि ब त्यांचे संख्यांची वजाबाकी करून त्यांत क ची संख्या मिळवावी , तें क्षचे बरोबर आहे .

√ अ अथवा अ^३ हें अचें वर्गमूळ दाखवितें ३

अ अथवा अ^३ हैं अ^३ घनमूळ दाखवितें. ७ अ^३ अथवा अ^३ हैं अ^३चे वर्गाचें घनमूळ दाखवितें. ८ अ अथवा अ^३ हैं अ^३चें म संख्या घातमूळ दाखवितें. ९ अ^३ हैं दाखवितेंकीं, जितकी म संख्या आहे तितकें अ संख्येचें घातमूळ काढावें. आणि त्या मुळाचा न संख्या घात करावा. अथवा $\sqrt[m]{a^3}$ त्याचा भागाकार येईल तितकी अची संख्या वर्गादिकें करून वाढवावी, किंवा मूळ काढावें.

अ^३ हैं अचा वर्ग दाखवितें म्हणजे अ·अ. अ^३हें अचा घन दाखवितें म्हणजे अ·अ·अ. अ^३हें अचा चतुर्घात दाखवितें. अ^३हें नची संख्या आहे तितका अचा घात दाखवितें.

$\overline{अ+ब} \times क$, अथवा $(अ+ब)क$ हें अ+बत्या संयुक्त पदाला क ह्यानें गुणिलें असतां जो गुणाकार होतो तो दाखवितें. — ह्याप्रमाणें वरती रेघ किंवा $()$ ह्याप्रमाणें दोन बाजूंस दोन कोंम हें चिन्ह वियुक्त पदं परस्पर संबद्ध त्यामुळें संयुक्त असें दाखवितें.

$\overline{अ+ब} \div \overline{अ-ब}$ अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ हें अ+ब भागिला अ-बनें त्यापासून जो भागाकार तो दाखवितें.

√अब+कड अथवा (अब+कड)^२ हे अब+कड त्या संयुक्त पदाचे वर्गमूळ दाखविते, आणि क√अब+कड अथवा क(अब+कड)^२ हे अब+कड त्या संयुक्त पदाचे वर्गमूळ क त्या एक पदाने गुणून जो गुणाकार होतो तो दाखविते.

अ+ब-क^३ अथवा (अ+ब-क)^३ हे अ+ब-क त्या संयुक्त पदाचा घन दाखविते.

३ अ हे अची संख्या ३ त्यांनी गुणावी असें दाखविते आणि ४ (अ+ब) हे अ+ब त्या संयुक्त पदाचे संख्येस ४ त्यांनी गुणावे असें दाखविते; आणि ३ क्ष हे तीन चतुर्थांशांनी गुणिला क्ष असें दाखविते.

५ सरूप पदे तींच होत ज्यांचीं अक्षरे आणि वर्गादिक एकच आहेत, जसें अ आणि ३अ अथवा २अब आणि ४अब अथवा ३अबक आणि—५अबक.

६ विरूप पदे तींच होत ज्यांचीं अक्षरे आणि वर्गादिक हीं भिन्नजाति आहेत, जसें अ आणि ब, अथवा २अ आणि अ^२, अथवा ३अब^२ आणि ३अबक.

७ एकपद तेच होय ज्यांत एकच रकम आहे, जसें ३अ, अथवा ५अब, अथवा ६अबक.

८ संयुक्तपदें तींच होत ज्यांत दोन तीन आदिकरूत अनेक रकमा परस्पर संबद्ध आहेत, जसें अ+ब, अथवा २अ-३क, अथवा अ+२ब-३क.

९ आणि जेव्हां संयुक्त पदांत दोनच रकमा आहेत तेव्हां त्यास द्वियुक्पद म्हणतात; जसें अ+ब.—जेव्हां त्यांत तीन पदें आहेत तेव्हां त्यास त्रियुक्पद म्हणतात, जसें अ+२ब-३क—जेव्हां त्यांत चार रकमा आहेत तेव्हां त्यास चतुर्युक्पद म्हणतात, जसें २अ-३ब+क-४ड. आणि व्याप्तमाणेंच पंचयुक्पद इत्यादिक पुढेंही जाणावीं. आणखीही ज्यांत बहुत रकमा आहेत त्यास बहुयुक्पद म्हणतात.

१० जेव्हां द्वियुक्पदांत एक रकम ऋण आहे तेव्हां त्यास धनर्णपद म्हणतात. जसें अ-२ब.

११ धनपद तेंच होय. जें मिळवायाचें आहे, ज्यास+ हें अधिकजातिप्रकाशक चिन्ह जोडलें आहे, जसें+ अ. जेव्हां कोणतेंही पद कोणतेही चिन्हावांचून असेल तेव्हां तें धन आहे असें समजावें, जसें अ म्हणजे+ अ.

१२ ऋणपद तेंच होय, जें वजाकरायाचें आहे, जसें -अ अथवा -२अब अथवा -३अब.

१३ सरूप चिन्हें तींच होत, जीं सर्व (+) धन किंवा सर्व (-) ऋण आहेत .

१४ विरूप चिन्हें तींच होत, ज्यांत किती एक (+) धन आणि किती एक (-) ऋण अशीं आहेत .

१५ कोणतेही पदाचा वेळाप्रकाशक तोच होय, जो अंक त्या पदाचे मागे लिहिला आहे, जसें ३अब येथें ३हा अंक वेळाप्रकाशक आहे .

१६ घात म्हणजे कोणतेंही पद, जसें अ, त्याचें वर्गादिक, जसें अ^२, अ^३, अ^४, त्याप्रमाणें बुद्धें ही .

१७ घातप्रकाशक अथवा घातमूळप्रकाशक तोच अंक होय, जो त्या पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूळादिक दाखवितो, म्हणजे २हा अंक वर्गप्रकाशक, जसें अ^२; आणि ३हा अंक घनप्रकाशक, जसें अ^३; आणि ३हा वर्गमूळप्रकाशक, जसें अ^३ अथवा √अ; आणि ३हा घनमूळप्रकाशक, जसें अ^३ अथवा ∛अ .

१८ अखंडपद तींच होय ज्यास मूळप्रकाशक (√) नाही, जसें अ अथवा ३अब .

१९ खंडपद अथवा करणी तींच होय, ज्याचें मूळ अंशांबाबून केवळ पूर्णांकांतच येत नाही, जसें २, ३, ५,

इत्यादिक . त्यांचे वर्गमूळ केवळ पूर्णांकानच येत नाही . करणीस मूळप्रकाशक (√) जोडिला राहतो, जसें √२, अथवा √७ अथवा √७^२ . किंवा करणी अशीही लिहितात, जसें २^{१/२}, अ^{१/२} अ^{३/२} .

२० कोणत्याही पदाचा व्युत्क्रम तोच होय, जें पद उलटें लिहिलें, अथवा त्या पदानें १ भागिलेला, जसें ७ अथवा $\frac{७}{१}$ त्याचा व्युत्क्रम हा होय १ आणि $\frac{१}{७}$ त्याचा व्युत्क्रम हा होय $\frac{७}{१}$.

२१ जीं अक्षरें एक पदाचे संख्यानिवेदनार्थ कामांत घेतात तीं इच्छेस येईल त्या क्रमानें लिहावीं, जसें ७ आणि ७ त्यांचा गुणाकार त्याप्रमाणें लिहितां येतो . अब, अथवा बअ; आणि अ,ब,क, त्यांचा गुणाकार त्याप्रमाणें लिहितां येतो, अबक, अथवा अकब, अथवा बअक, अथवा बकअ, अथवा कअब, किंवा कबअ, त्यांत कोणताही प्रथम गुणिला म्हणून चिंता नाही . गुणाकार बरोबरच येतो .

२२ त्याप्रमाणें संयुक्त पदाच्या वेगळाल्या रकमा असतील त्याही इच्छेस येईल तशा क्रमानें लिहाव्या, त्यांची किंमत अथवा अर्थ बरोबरच आहे . जसें ३अ-२अब+

४ अबक . हे असेही लिहितां येतात , ३अ+४अबक
-२अब . अथवा त्याप्रमाणें , ४अबक+३अ-२अब
किंवा त्याप्रमाणेंही , - २अब+ ४अबक+ ३अ इत्यादि
म्हणजे हे सर्व ४अबक आणि ३अ त्यांचे वेरजेंतून २
अब वजा करून जी बाकी राहाती तिचे वगबर दाखवि-
तात . परंतु बहुत करून धन रकम आरंभीं लिहितात अशी
चाल आहे .

त्या सर्व वरच्या व्याख्या समजावया करितां कितीए
क उदाहरणें लिहितों .

तां अशीं कीं , वेगळाल्या चिन्हांचि संयुक्तपदांपासून
संख्या काढावयाचीं .

मनांत आण कीं , पुढील उदाहरणांत अ=६, ब=
५, क=४, ड=१, ई=०

उदाहरणें .

पहिलें , अ^३+ ३अब क^३ त्यांची संख्या काय
होती ?

उत्तर . ३६+ ९०- १६ = ११०

दुसरें , २अ^३- ३अब+ क^३ त्यांची संख्या काय

होती ?

उत्तर, $४३२ - ५४० + ६४ = -४४$

तिसरें, $अ^३ \times \overline{अ+ब} - २अबक$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $३६ \times ११ - २४० = १५६.$

चौथें, $\frac{अ}{अ+३क} + क^२$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\frac{३९६}{१८} + १६ = १२ + १६ = २८$

पांचवें, $\sqrt{२अक+क^२}$ अथवा $\overline{२अक+क^२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\sqrt{६४} = ८$

साहावें, $\sqrt{क + \frac{२अक}{२अक+क^२}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $२ + \frac{४०}{१०} = ७$

सातवें $\frac{अ^३ - \sqrt{ब^३ - अक}}{२अ - \sqrt{ब^३ + अक}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\frac{३६-१}{१२-३} = \frac{३५}{९} = ७$

आठवें, $\sqrt{ब^२ - अक} + \sqrt{२अक + क^२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $१ + ८ = ९$

नववें, $\sqrt{ब^२ - अक} + \sqrt{२अक + क^२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\sqrt{२५ - २४ + ८} = ३$

राहावे, $\overline{अब} + \overline{कड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, १८३

अकरावे, $९\overline{अब} - १०\overline{बै} + \overline{क}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $२७० - २५० + ४ = २० + ४ = २४$

बारावे, $\frac{\overline{अब}}{\overline{क}} \times \overline{ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

तेरावे, $\frac{\overline{अ+ब}}{\overline{क}} \times \frac{\overline{ब}}{\overline{ड}}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१३\frac{३}{४}$

चौदावे, $\frac{\overline{अ+ब}}{\overline{क}} - \frac{\overline{अ-ब}}{\overline{ड}}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१\frac{३}{४}$

पंधरावे, $\frac{\overline{अब}}{\overline{क}} + \overline{ई}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

सोळावे, $\frac{\overline{अब}}{\overline{क}} \times \overline{ई}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ०

सत्रावे, $\overline{ब-क} \times \overline{ड-ई}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, १

अठरावे, $\overline{अ+ब} - \overline{क-ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ८

एकुणिसावें, $\overline{अ+ब-क-ड}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, ६

विसावें, $\overline{अ^३क \times ड^३}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, १४४

एकविसावें, $\overline{अकड-ड}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, २३

बेविसावें, $\overline{अ^३ई + ब^३ई + ड}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, १

तेविसावें, $\frac{ब-ई}{ड-ई} \times \frac{अ+ब}{क-ड}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, १० $\frac{३}{२}$

त्रोविसावें, $\sqrt{अ^३+ब^३} - \sqrt{अ^३-ब^३}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, ४०४९३६२४९

पंचविसावें, $\overline{३अक^३ + २\sqrt{अ^३-ब^३}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, २९२०४९७९४२

सविसावें, $\overline{४अ^३-३अ\sqrt{अ^३-३अब}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, ७२

मिळवणी.

बीजगणितांत मिळवणी तीच होय जें वेगळालीं पदें त्यांचे त्यांचे चिन्हांनीं जोडून लिहिणें. जेव्हां सरूप पदेंच असतील तेव्हां तीं एकत्र मिळवून त्यांची एक रकम करावी जसें, $३अ + २ब - २अ$ त्यांची वेरीज, $अ + २ब$.

बीजगणितांत मिळवणीचे रीतीचे प्रकार तीन आहेत.

- १ वेगळालीं पदें सरूप आणि त्यांचीं चिन्हेही सरूप आहेत.
- २ वेगळालीं पदें सरूप आहेत, परंतु त्यांचीं चिन्हे विरूप आहेत.
- ३ वेगळालीं पदें विरूप आहेत, त्यांचीं कामें पुढें सागतीं

‡ जीं पदें मिळवायानां आहेत त्यांची जाति लक्षांत आणिली असतां या कामाना आश्रय आणि त्या प्रकारांचीं कारणें स्वल्पांत समजांत येतील, म्हणून मध्यम प्रकारांत दोन पदें आहेत $३अ$ आणि $५अ$. आतां एथें एकरकमेंतील अजी वस्तू निवेदितो तीच वस्तू दुसरे रकमेंतील ही अ निवेदितो. तेव्हां जी वस्तू ३ वेळ तीच वस्तू पुनः ५ वेळां एकूण आठवेळां, परंतु वस्तू तीच हा निश्चय. जर $अ$ एक रुपया निवेदितो तर $३अ$ ३ रुपये आणि $५अ$ ५ रुपये, त्यांची वेरीज $८अ$ म्हणजे ८ रुपये झाली. याप्रमाणें- $३अ$ व $५अ$ अथवा $७अ$ अथवा कोणती ही वस्तू- २ आणि तीच वस्तू- ७ हे दोन्ही मिळून तीच वस्तू- ९ वेरीज झाली.

प्रथमप्रकार

जिन्हां वेगबालीं पदें सरूप आहेत आणि त्यांचीं चिन्हें ही सरूप आहेत .

आतां दुसरे प्रकारांत पदें मात्र सरूप आणि चिन्हें विरूप या प्रकारांचें कारण याकसून स्वत्यांत समजांत येईल, कीं मिळवणी म्हणजेही आहे जे वेगबालीं पदें गणितरीतीनें एकच मिळवावीं, जशीं त्यांचीं चिन्हें + धन आणि - कृण ही दाखवितात म्हणजे मिळवणी आणि वजाबाकी, परंतु

हीं दोन कामें परस्पर विरुद्ध याज करितां असें आल्यासं एकाच वेळापकाराक दुसऱ्याच्यांतून वजाकळा पाहिजे, असा कीं त्यापदांची एकच रकम होईल .

आतां तिसरे प्रकारांत जिन्हां सर्व पदें विरूप आहेत तेव्हां स्पष्ट दिसते कीं अशीं पदें एकत्ररकमेत कदापि होणार नाहीत म्हणून त्यांची बेरीज वेगबाल्या रकमा त्यांच्याचि चिन्हांनीं जोडिल्यावांचून दुसऱ्या रीतीनें कदापि होणार नाही. जसें, जर अ एक रुपया निवेदितो आणि ब एक पेसा तर अ आणि ब यांची बेरीज २ अ किंवा २ ब होणार नाही, म्हणजे २ रुपय किंवा २ पेसे नाहीत, परंतु अ + ब हे आहे, कीं एक रुपया अधिक एक पेसा .

या रीतीत मिळवणी हा शब्द चांगले प्रकारें लागत नाही. एथें जितकें काम करायाचें आहे तितका पूर्ण अर्थ या शब्दापासून मिळत नाही. तें काम हें आहे कीं वेगबालीं पदें एकच मिळतील तर मिळवावीं, न मिळतील तर त्यांचीं त्यांचीं चिन्हें जोडून अनुक्रमें लिहावीं. जिन्हां वेगबाल्या पदांत कित्येक + धन आणि कित्येक - कृण आहेत. तर त्यांत सरूप पदें असतील तीं पूर्व रीतीनें एकच करितां येतील .

बिजगणितांत मिळवणी पाहातां कोठें अनेक रकमांची एक रकम करणें, कोठें वजाबाकी करणें, असें परम आश्चर्य दिसते, परंतु मिळवणी शब्दाचा अर्थ एकीकरण किंवा बाकी असा अर्थ घेतात आणि त्यावर किंमती आश्चर्य नाही असें दिसेल .

रीति.

सर्व वेळाप्रकाशक मिळवून त्यांची बेरीज लिहावी. नंतर त्या सरूप पदांचे अक्षर पुढे लिहावे आणि प्रकाशक चिन्ह + धन किंवा - ऋण असेल ते आदौ जोडावे.

जसें ३अ आणि ५अ ह्या दोहोंची बेरीज ८अ होती.

- २अब आणि - ७अब ह्यांची बेरीज - ९अब होती

५अ + ७ब आणि ७अ + ३ब ह्यांची बेरीज १२अ + १०ब होती.

हीच रीति समजायाकरितां दुसरीं उदाहरणें.

| | | |
|--------------|-----------------------|---------------------|
| ३अ | - ३बक्ष | बक्षय |
| ९अ | - ५बक्ष | २बक्षय |
| ५अ | - ४बक्ष | ५बक्षय |
| १२अ | - २बक्ष | बक्षय |
| अ | - ७बक्ष | ३बक्षय |
| २अ | - बक्ष | ५बक्षय |
| <u>३३अ</u> | <u>- २२बक्ष</u> | <u>१८बक्षय</u> |
| ७ज्ञ | ३क्ष + ५क्षय | २अक्ष - ४य |
| २ज्ञ | क्ष + क्षय | ४अक्ष - य |
| ४ज्ञ | २क्ष + ४क्षय | अक्ष - ३य |
| ज्ञ | ५क्ष + २क्षय | ५अक्ष - ५य |
| ५ज्ञ | ४क्ष + ३क्षय | ७अक्ष - २य |
| <u>१५ज्ञ</u> | <u>१५क्ष + १५क्षय</u> | <u>१९अक्ष - १५य</u> |

| | | |
|---------------|-------------------------|---------------|
| ५ क्षय | -१२ य ^३ | ४अ-४ ब |
| १४ क्षय | -७ य ^३ | ५अ-५ ब |
| २२ क्षय | -२ य ^३ | ६अ-६ ब |
| १७ क्षय | -४ य ^३ | २अ-२ ब |
| १३ क्षय | -५ य ^३ | २अ-७ब |
| <u>३ क्षय</u> | <u>-३ य^३</u> | <u>८अ-८ ब</u> |

| | |
|------------------------------|---------------|
| १०-१२ क्ष ^३ | ३ क्षय |
| २१-१० क्ष ^३ | ४ क्षय |
| १४-१४ क्ष ^३ | ७ क्षय |
| १०-१६ क्ष ^३ | ५ क्षय |
| <u>१६-२० क्ष^३</u> | <u>१ क्षय</u> |

| |
|-----------------------|
| ५क्षय-३क्ष+४अब |
| ८क्षय-४क्ष+२अब |
| २क्षय-५क्ष+५अब |
| क्षय-२क्ष+अब |
| <u>४क्षय-१क्ष+७अब</u> |

दुसरा प्रकार .

जेव्हा वेगळालीं पदें सरूप आहेत परंतु त्यांचीं विनै विरूप आहेत .

रीति .

धन वेळापकाशकांची बेरीज घ्यावी आणि ऋण वेळापकाशकांची बेरीज घ्यावी, नंतर त्या दोन बेरिजांत जी अधिक असेल त्यांतून उणी बेरीज वजा करून बाकी राहिल तिचे पा-

ठीमागे अधिक बेरिजेचे प्रकाशक चिन्ह जें असेल तें लिहावें.
आणि त्याचे पुढें त्या वाकी सरूप पदाचें अक्षरचिन्ह लिहावें.

जसें +५ अ आणि -२ अ त्यांची बेरिज +२ अ झाली.

-५ अ आणि +३ अ त्यांची बेरिज -२ अ झाली.

हीच रीति समजावयाकरितां दुसरीं उदाहरणे.

$$\begin{array}{r} -५ अ \\ + ४ अ \\ + ६ अ \\ - ३ अ \\ + अ \\ \hline + ३ अ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ३ अक्ष \\ + ४ अक्ष \\ - ६ अक्ष \\ - ६ अक्ष \\ + ५ अक्ष \\ \hline - २ अक्ष \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ६ क्ष - ३ य \\ - ५ क्ष + ४ य \\ - १५ क्ष + ५ य \\ + ३ क्ष - ३ य \\ + २ क्ष - २ य \\ \hline - ८ क्ष - ३ य \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - ३ अ \\ - ५ अ \\ - १० अ \\ + १० अ \\ + १४ अ \\ \hline \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ३ बी य \\ + ९ बी य \\ - १० बी य \\ - १९ बी य \\ - २ बी य \\ \hline \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ४ अब + ४ \\ - ४ अब + १० \\ + १० अब - १४ \\ + अब + ३ \\ - ५ अब - १० \\ \hline \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - ३ अक्ष रे \\ + अक्ष रे \\ + ५ अक्ष रे \\ + ६ अक्ष रे \\ \hline \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + १० अक्ष \\ - ३ अक्ष \\ + ४ अक्ष \\ - १२ अक्ष \\ \hline \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ३ य + ४ अक्ष रे \\ - य - ५ अक्ष रे \\ + ४ य + २ अक्ष रे \\ - २ य + ६ अक्ष रे \\ \hline \hline \end{array}$$

तिसरा प्रकार.

जेव्हां बेगळालीं पदं विरूप आहेत तेव्हां.

रीति

पूर्वी सांगितल्या दोन प्रकारांप्रमाणे सरूप पदं एकत्र मिळवून लिहावीं आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांचे त्यांचे प्रकाराक चिन्हांसह वर्तमान एकापुढें एक जोडून लिहावीं.

उदाहरणे

$$\begin{aligned} & ३ क्षय \\ & २ अक्ष \\ & -५ क्षय \\ & ६ अक्ष \\ \hline & -२ क्षय + ८ अक्ष \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ९ अक्ष \\ & -७ अक्ष \\ & + ३ अक्षय \\ & + ४ अक्षय \\ \hline \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ४ अक्षय \\ & - ६ क्षय \\ & + ३ अक्षय \\ & - ७ अक्षय \\ \hline \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -६ क्षय - १२ अक्ष \\ & - ४ अक्ष + ३ क्षय \\ & + ४ अक्ष + २ क्षय \\ & - ३ क्षय + ४ अक्ष \\ \hline & - ४ क्षय - ८ अक्ष \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & १४ अक्ष - २ अक्ष \\ & ५ अक्ष + ३ क्षय \\ & ८ अक्ष - ४ अक्ष \\ & ३ अक्ष + २ क्षय \\ \hline \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ४-१ अक्ष - ३ य \\ & २-१ क्षय + १४ अक्ष \\ & ३ अक्ष + २ य \\ & -१-३ क्षय \\ \hline \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ४ अक्ष - १३ य + ३ अक्ष \\ & ५ अक्ष + ३ अक्ष + ९ अक्ष \\ & ७ क्षय - ४ अक्ष + १० \\ & -१ अक्ष + ४० - ६ अक्ष \\ \hline & ७ अक्ष - ८ अक्ष + ७ क्षय \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ६-१०-१ अक्ष - ५ य \\ & २ अक्ष + ७-१ क्षय + ५ य \\ & ५ य + ३-१ अक्ष - ४ य \\ & १०-४-१ अक्ष + ४ य \\ \hline \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ३ अक्ष + ९ + अक्ष - ४ \\ & ७ अक्ष - ८ + २ अक्ष - ३ अक्ष \\ & ४ अक्ष - २ अक्ष + १० - ७ \\ & - १२ अक्ष - ३ अक्ष - २ य \\ \hline \hline \end{aligned}$$

आणखी उदाहरणे.

प्रथम, अ + व आणि ३ अ - ५ व त्यांची बेरीज काय होईल ?

दुसरे, ५ अ - ८ क्ष आणि ३ अ - ४ क्ष त्यांची बेरीज काय होईल ?

तिसरे, ६ क्ष - ५ व + अ + ८ आणि - ५ अ - ४ क्ष + ४ व - ३ त्यांची बेरीज काय होईल ?

चौथे, अ + २ व - ३ क - १० आणि ३ व - ४ अ + ५ क + १० आणि ५ व - क त्यांची बेरीज काय होईल ?

पाचवे, अ + व आणि अ - व त्यांची बेरीज काय होईल ?

साहावे, ३ अ + व - १० आणि क - उ - अ आणि - ४ क + २ अ - ३ व - ७ त्यांची बेरीज काय होईल ?

सातवे, ३ अ^२ + व^२ - क आणि २ अ व - ३ अ^२ + व क - व त्यांची बेरीज काय होईल ?

आठवे, अ^३ + व क - व^३ आणि अ व^३ - अ व क + व^३ त्यांची बेरीज काय होईल ?

नववे, ९ अ - ८ व + १० क्ष - ६ उ - ७ क + ५० आणि २ क्ष - ३ अ - ५ क + ४ व + ६ उ - १० त्यांची बेरीज काय होईल ?

वजाबाकी .

जर कोणत्याही पदापासून कांहीं ही वजा करायाचें आहे तर तें पद वर एके ओळींत लिहावें , नंतर जें पद वजा करायाचें आहे तें तसेंच त्याचे खालीं लिहावें . असें कीं, सरूप अक्षरें एकाखालीं एक अशीं येतील .

नंतर खालचे ओळींतील चिन्हे + धन आणि - ऋण असतील तीं बदल करून लिहावीं . अथवा बदल केलीं असें मनांत आणावें . नंतर मिळवणीचे रीतीनें तीं सर्व पदे एकत्र करावीं .*

* या रीतीस आश्रय हाच आहे कीं, मिळवणी आणि वजाबाकी यांची जाति आणि क्रम परस्पर विरुद्ध आहेत , हें त्यांचीं चिन्हे दाखवितात . + आणि - कोणतीही ऋण पदें दुसरे धनपदांशीं मिळवितां असें कार्य होतें . कीं धनपदां तून या ऋणपदांबरोबर धनपद वजा केले . आतां वजाबाकी मिळवणीशीं विरुद्ध आहे . या जकरितां धनपद कोणत्याही दुसऱ्या धनपदांतून वजा करणें हें त्याचे बरोबर आहे , कीं ऋण पद धनपदास मिळविलें . या रीतीनें एक ऋण पद मिळविणें हें याचे बरोबर आहे , कीं एक धन पद मिळविलें . याप्रमाणें कोणत्याही पदांचीं चिन्हे बदल करितां म्हणजे + धन ठिकाणी - ऋण आणि - ऋण ठिकाणी + धन . याप्रमाणें करितां त्या पदांची जाति ही बदल होती , म्हणजे पूर्वी वजाबाकीचें रूप होतें तें मिळवणीचें रूप झालें .

| | | |
|-------------------------|----------------------------|------------------------------|
| <u>७ अ-३ ब</u> त्यांतून | <u>१ क्ष-४ य</u> | <u>२ क्षय-३+६ क्ष-५</u> |
| <u>२ अ-८ ब</u> हे वजा | <u>६ क्ष+५ य-४</u> | <u>४ क्षय-७-६ क्ष-४ य</u> |
| <u>५ अ+५ ब</u> बाकी. | <u>३ क्ष-० य+१०</u> | <u>४ क्षय+४+१२ क्ष+३ य</u> |
| <u>५ क्षय-६</u> | <u>४ य-३ य-४</u> | <u>-२०-६ क्ष-५ क्षय</u> |
| <u>-२ क्षय+६</u> | <u>२ य+२ य-४</u> | <u>३ क्षय-९ क्ष+८-२ अय</u> |
| <u>७ क्षय-१२</u> | <u>२ य-५ य-८</u> | <u>-२८+३ क्ष-८ क्षय+३ अय</u> |
| <u>८ क्षय+६</u> | <u>५ क्षय+२ क्ष-५ क्षय</u> | <u>१ क्ष+२ क्ष-१८+३ य</u> |
| <u>-२ क्षय+२</u> | <u>७ क्षय+३-२ क्षय</u> | <u>९ क्ष-१२+५ य+६ क्षे</u> |
| <u>५ क्षय-३०</u> | <u>३ क्ष-२ (अ+ब)</u> | <u>३ क्षय+२० अ+८ क्षय+१०</u> |
| <u>७ क्षय-५०</u> | <u>२ क्ष-४ (अ+ब)</u> | <u>४ क्षय+१२ अ+८ क्षय+१०</u> |

आणखी उदाहरणे.

प्रथम, अ + २ त्यांतून अ - ब हे वजा कर.

दुसरें, ३ अ + ४ ब त्यांतून ब + अ हे वजा कर.

तिसरें, ४ अ - ४ ब त्यांतून ३ अ + ५ ब हे वजा कर.

चौथें, ८ अ - १२ क्ष त्यांतून ४ अ - ३ क्ष हे वजा कर.

पाचवें, ३ क्ष - ४ अ - २ ब + ५ त्यांतून ८ - २ ब + अ + ६ क्ष हे वजा कर.

उदाहरणें.

| | | | | |
|-------|-------|--------|---------|-------------|
| १० अ | -३ अ | १ अ | -६ क्ष | हे गुण्य. |
| २ ब | +२ ब | -४ क | -४ अ | हे गुणक |
| २० अब | -६ अब | -२० अक | २४ अक्ष | हा गुणाकार. |

१। ज्या रकमा धन आहेत त्यांची बेरीज धन होती. यांतून निघतें की, + अ x + क यांचा गुणाकार + अक होतो.

२. जेव्हां दोन आदिकरूत पदें परस्पर गुणायाची आहेत तर कोणतेही तद्धेने ती पदें लिहितां तरी गुणाकार बरोबर येईल. म्हणजे अ x क आणि क x अ हे दोनही एकच आहेत. याजकरितां जेव्हां - अ हा + क यानें गुणायाचा, अथवा + क हा - अ यानें गुणायाचा आहे, यात अर्थ हा आहे की, जितकी संख्या + क यामध्ये आहे तितक्या वेळां - अ घेतला पाहिजे. आतां ज्या रकमा ऋण आहेत त्यांची बेरीज ऋण होते. यांतून निघतें की - अ x + क अथवा + क x - अ हे दोनही गुणाकार - अक होतात.

३. जेव्हां - अ आणि - क हे परस्पर गुणायाचे आहेत, एथें ती संख्या - क यामध्ये आहे तितक्या वेळां - अ घेता केला पाहिजे. परंतु ऋण वजा करणें हें पूर्वी मांगितलें. वजाबाकीवरील टीपप्रमाणें धनाचे मिळवणी बराबर आहे. क x अ अथवा + अक.

असें नसेल अ-अ=० याजकरितां (अ-अ) x - क हें ही=० कारण कोणतेही पदांने ० शून्य गुणिल्यास गुणाकार ० शून्य होईल. आतां गुणाकारांत प्रथम रकम अ x - क = - अक हें दुसरे प्रकारा प्रमाणें सिद्ध आहे, याजकरितां गुणाकाराची दुसरी रकम - अ x - क = निश्चय + अक असा की, दोन रकमांची बेरीज ० शून्याबराबर होईल, या प्रमाणें - अक + अक = ० शून्य. यांतून निघतें की - अ x - क = + अक आहे.

| | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ४अक | १अक्ष | -२क्षय | -४क्षय |
| -१अव | ४क्ष | १क्षय | -क्षय |
| <u>-१२अबक</u> | <u>१६अक्ष</u> | <u>-९क्षय</u> | <u>४क्षय</u> |
| -१अक्ष | -अक्ष | १क्षय | -१क्षयज्ञ |
| ४क्ष | -६क | -४ | -१अक्ष |
| <u><u> </u></u> | <u><u> </u></u> | <u><u> </u></u> | <u><u> </u></u> |

दुसरा प्रकार.

जेव्हा गुण्य आणि गुणकत्यांत एकसंयुक्तपद आहे.
रीति.

संयुक्तपदाची एक एक रकम वेगळाली एक पदांनं
पूर्व रीतीप्रमाणें गुणावी, गुणाकार येईल तो एकापुढें एकत्या-
चे त्याचे चिन्हांनं युक्त करून अनुक्रमानें लिहावा, म्हणजे स-
र्वमिळून गुणाकार झाला.

उदाहरणें.

| | | |
|----------------|-----------------|---------------------|
| ५अ-३क | १अक-४ब | २अ-३क+५ |
| २अ | १अ | बक |
| <u>१०अ-६अक</u> | <u>१अक-१२अब</u> | <u>२अबक-३बक+५बक</u> |

१२क्ष-२अक
४अ

२५क-७ब
-२अ

४६-ब+७अब
२अब

७क+११
४क्षय

१०क्ष-७य
-४क्ष

७अ-२क्ष-६ब
२अक्ष

तिसरा प्रकार .

जेव्हां गुण्य आणि गुणक हीं दोनही संयुक्त पदेंच आहेत.

रीति.

गुण्याच्या सर्व वेगळ्या रकमा गुणकाचे सर्व वेगळ्या रकमांनीं अनुक्रमें गुणाव्या, अशा कीं गुण्याची एक एक रकम सर्व गुणकांनं गुणिली जाईल, गुणाकार येईल तो एकाखा-
लीं एक अथवा एकापुढें एक अनुक्रमें लिहावा. नंतर त्यांत
जीं सरूप पदें असतील तीं सर्व एकत्र करावीं, म्हणजे सर्व
मिळून गुणाकार झाला.

उदाहरणें.

| | | |
|--|---|--|
| अ + ब | ३क्ष + २य | २क्ष + क्षय - २य |
| <u>अ + ब</u> | <u>४क्ष - १य</u> | <u>३क्ष - ३य</u> |
| अ ^२ + अब | १२क्ष ^२ + ०क्षय | ६क्ष ^२ + ३क्षय - ६क्षय |
| + अब + ब ^२ | - ११क्षय - १०य ^२ | - ६क्षय - ३क्षय + ६य ^२ |
| <u>अ^२ + २अब + ब^२</u> | <u>१२क्ष^२ - ११क्षय - १०य^२</u> | <u>६क्ष^२ - ३क्षय - ९क्षय + ६य^२</u> |
| अ + ब | क्ष + य | अ + अब + ब ^२ |
| <u>अ - ब</u> | <u>क्ष + य</u> | <u>अ - ब</u> |
| अ ^२ + अब | क्ष ^२ + क्षय | अ ^२ + अ ^२ ब + अब ^२ |
| - अब - ब ^२ | + क्षय + य ^२ | - अ ^२ ब - अब ^२ - ब ^२ |
| <u>अ^२ * - ब^२</u> | <u>क्ष^२ + २क्षय + य^२</u> | <u>अ^२ * * - ब^२</u> |

जिन्हां संयुक्त पदांस परम्पर गुणितात तेन्हां गुणायाचा आरंभ डावेकडून करावा म्हणजे अंकगणित गुणाकाराचे उलटा, आणि गुणाकार लिहितेसमयीं पूर्व ओबीचें एक स्थान सोडून दुसरे ओबीचा आरंभ करावा. त्याप्रमाणें प्रतिओबीस एक एक स्थान सोडून, असें पुढें ही, म्हणजे सरूप रकमा एकाखालीं एक येऊन मिळवणीसमयीं श्रम पडणार नाही.

बहुतकरून संयुक्त पदांचा गुणाकार असा लिहिता

त कीं, संयुक्त पदों सांख्यींत लिहून मध्यं गुणाकाराचें चिन्ह मात्र लिहिनात.

जसें $(अ+ब) \times (अ-ब) \times ७$ अब. अथवा त्या प्रमाणें . $अ+ब \cdot अ-ब \cdot ७$ अब.

उदाहरणें.

पहिलें, १० अक त्यांस २ अ त्यांनीं गुण.

गुणाकार, २० अक

दुसरें, ३ अ-२ ब त्यांस ३ ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ९ अ-६ ब

तिसरें, ३ अ+२ ब त्यांस ३ अ-२ ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ९ अ-४ ब

चवथें, १० अ-५ य त्यांस ५ य त्यांनीं गुण.

गुणाकार, १० अ-५ य

पांचवें, ३ अ+२ ब+१ ब त्यांस ३ अ-२ ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ३ अ-२ ब

साहायें, ३ अ+२ ब+१ ब त्यांस ३ अ-२ ब+१ ब त्यांनीं गुण.

सातवें, क्ष^१-२ क्षय+५ त्यांस क्ष^१+२क्षय-६ त्यांनीं गुण
 आठवें, ३ अ^१-२ अक्ष+५ क्ष^१ त्यांस ३ अ^१-४ अक्ष-
 ७ क्ष^१ त्यांनीं गुण.

नववें, ३ क्ष^१+२क्षय^२+३ य^१ त्यांस २क्ष-३क्षय^२-३
 य^१ त्यांनीं गुण.

राहावें अ^१+अब+ब^१ त्यांस अ-२ब त्यांनीं गुण.

भागाकार.

बीजगणितांत भागाकार अंकगणिताप्रमाणेंच गुणा
 काराचे उलटा आहे, आणि अंकगणिताप्रमाणेंच उजवेकडून
 उजवेकडे भागीत जावें. भाज्य निःशेष भागिला जाईल तर
 वर सांगितल्या रीतीनें भागून भागाकार लिहावा. तसें न होई-
 ल तर व्यवहारी अपूर्णाकरीतीनें वर भाज्य लिहून रवालीं
 भाजक लिहावा. त्यांत ही होईल तर संक्षेप करावा आणि
 लिहावा. त्याचे प्रकार आहेत ते सांगतां.

प्रथमप्रकार.

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही एकाकी आहेत

अंकगणिताप्रमाणें भाजक भाज्याचे मागें अथवा व्य
वहारी अपूर्णांक रीतीनें भाज्याचे खालीं अशा तऱ्हेनें दोनही
रकमा लिहाव्या, नंतर भाज्यभाजकांचा होईल तेबढा संक्षेप
करावा. त्याची रीति ही आहे कीं, त्या दोन रकमांत जीं साधा-
रण अक्षरें असतील तीं दोनही रकमांतून रद्द करावीं, नंतर
भाजक वेळाप्रकाशकानें भाज्य वेळाप्रकाशक भागावा. अथ
वा व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें त्या दोहोंच्या दृढभाजकानें भा
गून संक्षेप करावा.

भाज्य आणि भाजक त्यांचीं विन्हें सरूप असल्यास भा
गाकार (+) धन होतो आणि तीं विरूप असल्यास भागाकार
(-) ऋण होतो.*

* म्हणून पाह्य भाजक आणि भागाकार हे परस्पर गुणिले असतां भाज्यसि
द्ध होतो याजकरितां.

१. जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (+) धन आहेत तेव्हां भागाकार
निश्चित (+) धन होईल. कारण, धन भाजक धन भागाकारानें गुणिला असतां
गुणाकार भाज्य धन होतो.

२. जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (-) ऋण आहेत तेव्हांही भागाकार
(+) धन होईल. कारण, ऋण भाजक ऋण भागाकारानें गुणिला तर गुणाकार भा-
ज्य (+) धन होतो.

३. जेव्हां भाज्य आणि भाजक त्यांत एक धन आणि एक ऋण असें आहे
तेव्हां भागाकार निश्चित (-) ऋण होईल. कारण, धन भाजक ऋण भाजकानें

उदाहरणें.

प्रथम, ६ अब त्यांस ३ अ त्यांनीं भाग.

आतां ६अब ÷ ३अ. अथवा ३अ)६अब (अथवा $\frac{६अब}{३अ} =$

२ब.

दुसरें, क ÷ क = $\frac{क}{क} = १$ आणि अबक्ष ÷ बक्षय = $\frac{अबक्ष}{बक्षय} = \frac{अ}{य}$

तिसरें, १६ क्षै त्यांस ८ क्ष त्यांनीं भाग.

भागाकार, २ क्ष

चवथें, १२ अक्षै त्यांस - ३ अक्ष त्यांनीं भाग.

भागाकार, -४ क्ष

पांचवें, -१५ अयै त्यांस ३ अय त्यांनीं भाग.

भागाकार, -५ य

साहाबें, -१८ अक्षयै त्यांस - ८ अक्षज्ञ त्यांनीं भाग.

भागाकार, $\frac{९क्षय}{४ज्ञ}$

गुणिला तर गुणाकार भाज्य (-) कृण होतो. अथवा कृण भाजक धन भाजकानें गुणिला तर गुणाकार भाज्य (-) कृण होतो.

यांतून दिसतें कीं, भाज्यभाजकांचीं सरूप चिन्हें भागाकारास (+) धन करितात आणि त्या भाज्यभाजकांचीं विरूप चिन्हें भागाकारास (-) कृण करितात ही सामान्य रीति होय.

दुसरा प्रकार .

जेव्हां भाज्य संयुक्तपद आहे आणि भाजक एकाकी आहे .
रीति .

भाज्यांतील सर्व रकमा पूर्वरीतीप्रमाणें भाजकानें वेगळ्या
ल्या भागाव्या .

उदाहरणें .

पहिलें, $(अब+ब) \div २ब$, अथवा $\frac{अब+ब}{२ब} = \frac{अ+ब}{२}$
 $= \frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}ब$.

दुसरें, $(१०अब+१५अक्ष) \div ५अ$, अथवा
 $\frac{१०अब+१५अक्ष}{५अ} = २ब + ३क्ष$.

तिसरें, $(३०अज्ञ-४८ज्ञ) \div ६$, अथवा $\frac{३०अज्ञ-४८ज्ञ}{६}$
भागाकार, $३०अ-४८$

चवथें, $६अब-८अक्ष + अ$ त्यांस २अ त्यांनीं भाग .

पांचवें, $३क्ष-१५+६क्ष+६अ$ त्यांस ३क्ष त्यांनीं भाग .

साहाबें, $६अबक+१२अबक्ष-९अब$ त्यांस ३अब
त्यांनीं भाग .

सातवें, १० अक्ष-१५ क्ष-२५ क्ष त्यांस ५ क्षत्यांनीं भाग

आठवें, १५ अक्ष-१५ अक्ष+५ अक्ष त्यांस-५
अक्ष त्यांनीं भाग.

नववें, १५ अ+३ अय-१० य त्यांस-३ अत्यांनीं भाग.

दाहावें,-२० डैब+६० अब त्यांस-६ अब त्यांनीं
भाग.

तिसराप्रकार.

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोन ही संयुक्तपदेच आहेत.

रीति

१ अंकगणितरीतीनें भाज्य भाजक लिहावे, म्हणजे प्रथम भाजक लिहावा, नंतर भाज्य लिहावा. आतां त्या दोहोंचे मध्यें एक वांकडी रेघ करावी, आणि दोहोंत अक्षर चिन्हे असतील तीं मोठे घातापासून उतरतीं लिहावीं.

२ भाज्याचें पहिलें पद भाजकाचे पहिले पदानें प्रथम

प्रकाराप्रमाणें भागवें, आणि भागाकार येईल तो भागाकारस्थळीं लिहावा .

३ त्या भागाकारांनें सर्व भाजकपदें गुणून तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा .

४ नंतर बाकीवर वरचे भाज्यांतून पद खाली घेऊन पुनः पूर्वप्रमाणें भागवें . त्याप्रमाणें भाज्याचे प्रतिपदीं करावें; असें शेवटपर्यंत करावें; जसें अंकगणितांत करितात .

टीप . जर भाजक भाज्यांतून बरोबर जात नाहीत तर तें पद व्यवहारी अपूर्णाकरीतीनें लिहावें; जशी अंकगणितांत बाकी लिहितात .

उदाहरणें .

अ-क) $\text{अ}^३ - ४\text{अ}^२\text{क} + ४\text{अक}^२ - \text{क}^३$ ($\text{अ}^३ - ३\text{अक} + \text{क}^३$)

$\text{अ}^३ - \text{अ}^३\text{क}$

* $- ३\text{अ}^२\text{क} + ४\text{अक}^२$

$- ३\text{अ}^२\text{क} + ३\text{अक}^२$

* $+ \text{अक}^२ - \text{क}^३$

$+ \text{अक}^२ - \text{क}^३$

* *

अ-ब) अ^३-२अब+ब^३ (अ-ब भागाकार)

$$\begin{array}{r} \text{अ}^3 - 2\text{अब} + \text{ब}^3 \\ \hline * - \text{अब} + \text{ब}^3 \\ - \text{अब} + \text{ब}^3 \\ \hline * \quad * \end{array}$$

अ-२) अ^३-६अ^२+१२अ-८ (अ^३-४अ+४ भागाकार)

$$\begin{array}{r} \text{अ}^3 - 6\text{अ}^2 + 12\text{अ} - 8 \\ \hline * - 4\text{अ}^2 + 12\text{अ} \\ - 4\text{अ}^2 + 8\text{अ} \\ \hline * + 4\text{अ} - 8 \\ + 4\text{अ} - 8 \\ \hline * \quad * \end{array}$$

अ+ज्ञ) अ^३+अज्ञ (अ^३-अज्ञ+ज्ञ^३ भागाकार)

$$\begin{array}{r} \text{अ}^3 + \text{अज्ञ} \\ \hline * - \text{अज्ञ} + \text{ज्ञ}^3 \\ - \text{अज्ञ} + \text{ज्ञ}^3 \\ \hline * + \text{अज्ञ}^2 + \text{ज्ञ}^3 \\ + \text{अज्ञ}^2 + \text{ज्ञ}^3 \\ \hline * \quad * \end{array}$$

अ+२क्ष) अँ+४अक्ष+४क्ष (अ+२क्ष भागाकार .

$$\begin{array}{r} \text{अँ+२अक्ष} \\ \hline *+२अक्ष+४क्ष \\ +२अक्ष+४क्ष \\ \hline * \quad * \end{array}$$

अ+क्ष) अँ-३क्ष (अँ-अक्ष+अक्ष-क्ष- $\frac{१क्ष}{अक्ष}$ भागाकार

$$\begin{array}{r} \text{अँ+अक्ष} \\ \hline * - \text{अक्ष} - ३क्ष \\ - \text{अक्ष} - \text{अक्ष} \\ \hline * + \text{अक्ष} - ३क्ष \\ + \text{अक्ष} + \text{अक्ष} \\ \hline * - \text{अक्ष} - ३क्ष \\ - \text{अक्ष} - \text{क्ष} \\ \hline * - २क्ष \end{array}$$

दुसरीं उदाहरणें .

पहिलें, अँ+४अक्ष+४क्ष त्यांस अ+२क्ष त्यांनीं भाग.

उत्तर, अ+२क्ष

दुसरें, अँ+३अक्ष+३अक्ष-क्ष त्यांस अ-क्ष त्यांनीं

भाग .

उत्तर, अँ-२ अज्ञ+ज्ञै

तिसरें, १ त्यास १+ अ त्यांनीं भाग .

उत्तर, १- अ+अँ-अइत्यादिअनंत

चवथें, १२क्षँ-११२त्यांस ३क्ष-६त्यांनीं भाग .

उत्तर, ४क्षँ+८क्षँ+१६क्ष+३२

पांचवें, अँ-५अँब+१०अँबँ-१०अँबँ+५अबँ-
बँ त्यांस अँ-२अब+बँ त्यांनीं भाग .

उत्तर, अँ-३अँब+३अबँ-बँ

साहावें, ४८ज्ञँ-१६अज्ञँ-६४अँज्ञ+१५०अँत्यांस
२ज्ञ-३अ त्यांनीं भाग .

सातवें, बँ-३बँक्षँ+३बँक्षँ-११०त्यांस बँ-३बँक्ष+
३बँक्षँ-क्षँ त्यांनीं भाग .

आठवें, अँ-क्षँ त्यांस अ-क्ष त्यांनीं भाग .

नववें, अँ+५अँक्ष+५अक्षँ+क्षँत्यांस अ+क्ष त्यांनीं भाग .

दाहावें, अँ+४अँबँ-३२बँत्यांस अ+२बँत्यांनीं भाग .

अकरावें, २४अँ-बँत्यांस ३अ-२बँत्यांनीं भाग .

अपूर्ण बीजगणित .

अपूर्णबीजगणितांत नामें आणि रीति अपूर्णांकग-
णिताप्रमाणेंच आहेत, हे पुढें सांगतां त्या प्रकारावरून क-
ढेल .

पहिला प्रकार .

भागानुबंध पूर्णबीजास विषम अपूर्णबीजाचें रूप द्या-
वयाचा .

रीति .

पूर्ण बीज अपूर्णबीजाचे छेदांनीं गुणून त्या गुणाकारां
त अंश मिळवून अथवा मिळवणीचे चिन्हांनीं जोडून वर लिहावे,
आणि खालीं छेद लिहावे म्हणजे विषम अपूर्ण बीजाचें रूप
झालें .

उदाहरणें .

पहिलें, $३\frac{४}{५}$ आणि $अ - \frac{ब}{क्ष}$ त्या दोहोंस विषम अपूर्ण
बीजाचें रूप दे .

$$३\frac{४}{५} = \frac{३ \times ५ + ४}{५} = \frac{१५ + ४}{५} = \frac{१९}{५} \text{ हे उत्तर .}$$

$$अ - \frac{ब}{क्ष} = \frac{अ \times क्ष - ब}{क्ष} = \frac{अक्ष - ब}{क्ष} \text{ हे उत्तर .}$$

दूसरें, $a + \frac{a^2}{b}$ आणि $a - \frac{a^2 - a^3}{a}$ त्या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

$$a + \frac{a^2}{b} = \frac{a \times b + a^2}{b} = \frac{ab + a^2}{b} \text{ हें उत्तर.}$$

$$a - \frac{a^2 - a^3}{a} = \frac{a^2 - a^2 + a^3}{a} = \frac{a^3 - a^2}{a} \text{ हें उत्तर.}$$

तिसरें, $9 \frac{3}{4}$ त्यांस विषम अपूर्णांक रूप दे.

$$\text{चवथें, } 9 - \frac{9a}{4} \text{ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.}$$

$$\text{उत्तर, } \frac{36 - 9a}{4}$$

पांचवें, $2a - \frac{2a^2 + a^3}{4a}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

$$\text{उत्तर, } \frac{8a^2 - 2a^2 - a^3}{4a}$$

साहावें, $92 + \frac{8a - 96}{4a}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप

दे.

$$\text{उत्तर, } \frac{368a - 96}{4a}$$

सातवें, $1a + \frac{1 - 2a - k}{k}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप

प दे.

$$\text{उत्तर, } \frac{k^2 + 1 - 2a - k}{k}$$

आठवें, $8 + 2a - \frac{2a^2 + 2a}{4a}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

चें रूप दे.

$$\text{उत्तर, } \frac{32a + 10a^2 - 2a^2}{4a}$$

दूसरा प्रकार

विषम अपूर्ण बीजास पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप घावयाचा.

रिति.

पूर्ण बीज निघावयाकरितां अंशांस छेदांनीं भागाचें आणि कांहीं बाकी राहिली तर ती भागाकाराचे बाजूस लिहून तिचे खालीं छेद लिहावे.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{१५}{३}$ आणि $\frac{अब+अ^२}{ब}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

$$\frac{१५}{३} = १५ \div ३ = ५ \frac{३}{३} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\frac{अब+अ^२}{ब} = \overline{अब+अ^२} \div ब = अ + \frac{अ^२}{ब} \text{ हें उत्तर.}$$

दुसरें, $\frac{२अक-३अ^२}{क}$ आणि $\frac{३अस+४स^२}{अ+स}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

$$\frac{२अक-३अ^२}{क} = \overline{२अक-३अ^२} \div क = २अ - \frac{३अ^२}{क} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\frac{३अस+४स^२}{अ+स} = \overline{३अस+४स^२} \div अ+स = ३स + \frac{स^२}{अ+स} \text{ हें उत्तर.}$$

तिसरें, $\frac{३३}{६}$ आणि $\frac{२अक्ष-३क्ष^२}{अ}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे .

उत्तर, $\frac{६३}{६}$ आणि $\frac{२क्ष-३क्ष^२}{अ}$
 चवथें, $\frac{४अक्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ^२+२ब^२}{अ-ब}$ त्यांस पूर्णबीजरूप
 अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे .

उत्तर, $\frac{२अक्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ+२ब+४ब^२}{अ-ब}$
 पांचवें, $\frac{३क्ष^२-२य^२}{क्ष+य}$ आणि $\frac{२क्ष^२-२य^२}{क्ष-य}$ त्यांस पूर्णबीजरूप
 प अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे .

साहावे, $\frac{१०अ^२-४अ+६}{५अ}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे .

सा तवें, $\frac{१५अ^२+५अ^३}{३अ+२अ^२-२अ-४}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे .

तिसरा प्रकार .

अपूर्ण बीजास समच्छेद करायाचा

रीति .

प्रतिपदाचे अंश आणि त्याचे छेदांवांचून सर्व पदांचे छेद हे नवे अंश होण्याकरितां परस्पर गुणावे, आणि समच्छेद होण्याकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे .

जेव्हां सर्व छेद कोणत्याही एका अंकांमिं अथवा बीजांमिं भागिलि जातात तेव्हां ते भागून संक्षेप करावा, नंतर पूर्णमाणे करावे ; आणि त्या प्रकरणीं अपूर्णांकगणितांत ज्या रीति सांगितल्या आहेत त्या सर्व मनांत धरून करावे .

उदाहरणे .

पहिलें, $\frac{५}{११}$ आणि $\frac{३}{११}$ त्यांस समच्छेदरूप दे

आतां $\frac{५}{११}$ आणि $\frac{३}{११} = \frac{५३}{११११}$ आणि $\frac{३५}{११११}$ हें उत्तर .

दुसरें, $\frac{५}{११}$, $\frac{६}{५}$ आणि $\frac{३}{५}$ त्यांस समच्छेदरूप दे .

आतां $\frac{५}{११}$, $\frac{६}{५}$ आणि $\frac{३}{५} = \frac{५६३}{५५५५}$, $\frac{६६६}{५५५५}$ आणि $\frac{३६६}{५५५५}$ हें उत्तर .

तिसरें, $\frac{२५}{११}$ आणि $\frac{३६}{२५}$ त्यांस समच्छेदरूप दे .

उत्तर, $\frac{४५६}{२५११}$ आणि $\frac{३६६६}{२५११}$

चवथें, $\frac{२५}{५}$ आणि $\frac{३५+२६}{२५}$ त्यांस समच्छेदरूप दे .

उत्तर, $\frac{४अक}{२चक}$ आणि $\frac{३अब+२ब^२}{२बक}$
 पांचवें, $\frac{५अ}{३क्ष}$, $\frac{३ब}{२क}$ आणि ४ ड त्यांस समच्छेदरूप दे .

उत्तर, $\frac{१०अक}{६कक्ष}$ $\frac{९वक्ष}{६कक्ष}$ आणि $\frac{३४कडक्ष}{६कक्ष}$

साहायें, $\frac{५}{६}$ $\frac{३अ}{४}$ आणि $२ब + \frac{३अ}{ब}$ त्यांस समच्छेदरूप दे .

उत्तर, $\frac{२०ब}{२४ब}$ $\frac{१०अब}{२४ब}$ आणि $\frac{४०ब^२+७२अ}{२४ब}$

सातवें, $\frac{१}{३}$ $\frac{३अ^२}{४}$ आणि $\frac{३अ^२+ब^२}{अ+ब}$ त्यांस समच्छेदरूप दे .

आठवें, $\frac{३ब}{४अ^२}$ $\frac{२क}{३अ}$ आणि $\frac{ड}{२अ}$ त्यांस समच्छेदरूप दे .

चौथा प्रकार .

अपूर्ण बीजाचे पदांचा दृढभाजक काढावाचा .

रीति .

मोठें पद लहानपदानें भागावें, बाकी राहिल तो भाजक कल्पून त्यानें पूर्णभाजकास भागावें . त्याप्रमाणें बाकी ० पूज्य होई तोंपर्यंत करावें . शेवटील भाजक दृढभाजक होय .

टीप. भाजकपदांमध्ये जीं अक्षरें आणि अंक साधारण असतील तीं परस्पर भागून रद्द करावीं, नंतर दृढभाजक काढावा .

उदाहरणे .

पहिलें, $\frac{अब+ब^२}{अक^२+बक^२}$ त्यांचा दृढभाजक काढ .

$$अब+ब^२) अक^२+बक^२$$

$$\text{अथवा } अ+ब) अक^२+बक^२ (क^२$$

$$\frac{अक^२+बक^२}{अक^२+बक^२}$$

* *

एथें अ+ब हा दृढभाजक आहे, हें उत्तर

दुसरें, $\frac{अ^३-अब^२}{अ^२+२अब+ब^२}$ त्यांचा दृढभाजक काढ .

$$अ^२+२अब+ब^२) अ^३-अब^२ (अ$$

$$\frac{अ^२+२अब+अब^२}{अ^२+२अब+अब^२}$$

$$* -२अब-२अब^२) अ^२+२अब+ब^२$$

$$\text{अथवा } अ+ब) अ^२+२अब+ब^२ (अ+ब$$

$$\frac{अ^२+२अब+ब^२}{अ^२+२अब+ब^२}$$

$$* \frac{अब+ब^२}{अब+ब^२}$$

$$\frac{अब+ब^२}{अब+ब^२}$$

* *

एथें अ+ ब हा दृढभाजक आहे, हे उत्तर
तिसरें, $\frac{अ^१-४}{अब+२ब}$ त्यांचा दृढभाजक काढ.

चवथें, $\frac{अ^१-अ^३ब^३}{अ-ब^३}$ त्यांचा दृढभाजक काढ. उत्तर, अ-२

पाचवें, $\frac{अ^३क्ष+२अ^२क्ष^२+२अक्ष^३+क्ष^४}{५अ^४+१०अ^३क्ष+५अ^२क्ष^२}$ उत्तर, अ-ब
त्यांचा दृढभाजक काढ.

पांचवा प्रकार.

अपूर्णबीजाचा संक्षेप करावयाचा.

रीति.

पूर्वप्रकाराप्रमाणें पदांचा दृढभाजक काढून त्यानें
सर्व पदे भागावीं, भागाकार येईल तो संक्षेप झाला.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अब+ब^३}{अक^३+बक^३}$ त्यांचा संक्षेप कर.

अब+ब^३) अक^३+बक^३

अथवा अ+ब) अक^३+बक^३(क^३

अक^३+बक^३

※ ※

उदाहरणें .

पहिलें, $\frac{अ}{३}$ आणि $\frac{अ}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

$$\text{एथें } \frac{अ}{३} + \frac{अ}{४} = \frac{४अ}{१२} + \frac{३अ}{१२} = \frac{७अ}{१२} \text{ ही बेरीज. हें उत्तर}$$

दुसरें, $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{उ}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

$$\text{एथें } \frac{अ}{ब} + \frac{ब}{क} + \frac{क}{उ} = \frac{अकउ}{बकउ} + \frac{बउ}{बकउ} + \frac{बक}{बकउ} = \frac{अकउ + बउ + बक}{बकउ}$$

ही बेरीज झाली.

हें उत्तर .

तिसरें,* $अ - \frac{३अ^२}{ब}$ आणि $ब + \frac{२अक्ष}{क}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

$$\text{एथें } अ - \frac{३अ^२}{ब} + ब + \frac{२अक्ष}{क} = अ - \frac{३अक्ष}{बक} + ब + \frac{२अबक्ष}{बक} =$$

$$अ + ब + \frac{२अबक्ष - ३अक्ष^२}{बक} \text{ ही बेरीज. हें उत्तर .}$$

चवथें, $\frac{४क्ष}{३अ}$ आणि $\frac{२क्ष}{५ब}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

* भागानुबंध पूर्णबीजानी मिळवणी करितेसमयीं ही रीति सर्वांहून उत्तम आहे कीं, अपूर्णबीजाने मान अवयव समच्छेदकरून मिळवणी करावी, नंतर पूर्णबीजानी मिळवणी करून त्या अपूर्णबीजाने बेरजेस जोडून लिहावी.

$$\text{उत्तर, } \frac{२०\text{बक्ष} + ६\text{अक्ष}}{१५\text{अब}}$$

पांचवें, $\frac{३\text{अ}}{४}$ आणि $\frac{३\text{अ}}{५}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

$$\text{उत्तर, } \frac{४१३\text{अ}}{६०}$$

साहाचें, $\frac{२\text{अ}-३}{४}$ आणि $\frac{५\text{अ}}{८}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

$$\text{उत्तर, } \frac{९\text{अ}-६}{८}$$

सातवें, $२\text{अ} + \frac{\text{अ}+३}{५}$ आणि $४\text{अ} + \frac{२\text{अ}-५}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

$$\text{उत्तर, } ६\text{अ} + \frac{१४\text{अ}-१३}{२०}$$

आठवें, ६अ आणि $\frac{३\text{अ}^२}{४\text{ब}}$ आणि $\frac{\text{अ}+३}{३\text{ब}}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

नववें, $\frac{५\text{अ}}{४}$ $\frac{६\text{अ}}{५}$ आणि $\frac{३\text{अ}+२}{७}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

राहाचें, २अ $\frac{३\text{अ}}{४}$ आणि $३ + \frac{\text{अ}}{६}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

अकरावें, $८\text{अ} + \frac{३\text{अ}}{४}$ आणि $२\text{अ} - \frac{५\text{अ}}{८}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

सातवा प्रकार .

एका अपूर्णबीजपदास दुसऱ्यांतून वजा करायाचा
रीति.

अपूर्णबीजसमलेद नसल्यास मिळवणीप्रमाणें त्यास
समलेद करावे. नंतर अंशांची वजाबाकी करून त्या बाकी-
पानीं समलेद लिहावे, म्हणजे वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४अ}{९}$ त्यांची वजाबाकी कर .

एथें $\frac{३अ}{४} - \frac{४अ}{९} = \frac{२७अ}{३६} - \frac{१६अ}{३६} = \frac{११अ}{३६}$ बाकी, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३अ-व}{४क}$ आणि $\frac{३अ-४व}{३व}$ त्यांची वजाबाकी कर

एथें $\frac{३अ-व}{४क} - \frac{३अ-४व}{३व} = \frac{६अव-३व^२}{१२वक} - \frac{१२अक-१६वक}{१२वक} =$

$\frac{३अव-३व^२-१२अक+१६वक}{१२वक}$ हें उत्तर .

तिसरें, $\frac{१०अ}{६}$ आणि $\frac{४अ}{९}$ त्यांची वजाबाकी कर

चवथें, $\frac{६अ}{४}$ आणि $\frac{३अ}{४}$ त्यांची वजाबाकी कर .

पांचवें, $\frac{५अ}{४}$ आणि $\frac{२अ}{३}$ त्यांची वजाबाकी कर

साहायें, $\frac{३अ+क}{४}$ यांतून $\frac{२अ}{३}$ हे वजा कर .

सातवें, $\frac{४अ+६}{५}$ यांतून $\frac{२अ+६}{९}$ हे वजा कर .

आठवें, $४ अ + \frac{२अ}{क}$ यांतून $२अ - \frac{अ-३व}{क}$ हे वजा कर .

आठवा प्रकार .

अपूर्णबीजपदें परस्पर गुणायचा .

रीति .

गुणाकाराचे अंशांकरितां सर्व अंश परस्पर गुणावे आ
णि छेदाकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे.*

* १ जेव्हां एक अपूर्णबीजपदाचे अंश आणि दुसऱ्या अपूर्णबीजपदा
चे छेद यांचा दृढभाजक मिळेल तेव्हां त्यांनीं संक्षेप करावा .

२ जेव्हां अपूर्णबीजासंगातीं पूर्णबीज गुणायचें आहे, तेव्हां गुणा
कार त्याप्रमाणें होना . पूर्णबीजानिं अंश गुणावे, अथवा छेद भागावे; अ.
णिजरपूर्णबीज आणि छेद एकच समूह आहेत, तर अंशसिद्धत्व गुणाकार अति

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{८}$ आणि $\frac{२अ}{५}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{अ \times २अ}{८ \times ५} = \frac{२अ^२}{४०} = \frac{अ^२}{२०}$ हा गुणाकार, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{३}$, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{६अ}{१०}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{अ \times ३अ \times ६अ}{३ \times ४ \times १०} = \frac{१८अ^३}{१२०} = \frac{३अ^३}{१४}$ हा गुणाकार हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{अ+ब}{२अ+ब}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{२अ \times (अ+ब)}{ब \times (२अ+ब)} = \frac{२अ^२+२अब}{२अब+ब^२}$ हा गुणाकार हें उत्तर.

चवथें, $\frac{४अ}{३}$ आणि $\frac{६अ}{५}$ हे परस्पर गुण.

पाचवें, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४ब}{३अ}$ हे परस्पर गुण.

साहायें, $\frac{३अ}{ब}$ आणि $\frac{८अक}{ब}$ आणि $\frac{४अब}{३क}$ हे परस्पर गुण.

सातवें $\frac{३अ+अब}{२क}$ आणि $\frac{३अ}{ब}$ हे परस्पर गुण.

आठवें, $\frac{२अ^३-२ब^३}{३बक}$ आणि $\frac{४अ^३+२ब^३}{अ+ब}$ हे परस्पर गुण.

नववें, १ अ आणि $\frac{२अ+१}{अ}$ आणि $\frac{२अ-१}{२अ+ब}$ हे पर-
स्पर गुण.

दाहावें, $अ + \frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष^२}{४अ^२}$ त्यांस $क्ष - \frac{अ}{२क्ष} + \frac{अ^२}{४क्ष^२}$ त्यांनी
गुण.

नववाप्रकार.

एक अपूर्णबीज पदास दुसऱ्यानें भागायाच्चा.

रीति.

एकाचे अंश दुसऱ्याचे अंशांनीं भागावे, आणि छेद
छेदांनीं भागावे, जर निःशेष भागिले जातील. तसें न हाईल
तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदल करून गुणाकार री-
तीनें भाज्य भाजक गुणावे.*

उदाहरणें.

* १ जर अपूर्णबीज भाज्य समछेद आहे तर भागाकाराचे अंशांकरितां त्या
चे अंश घ्यावे, आणि भागाकाराचे छेदांकरितां भाजकाचे अंश घ्यावे.

पहिले, $\frac{३अ}{४}$ त्यांस $\frac{३अ}{४}$ त्यांनी भाग.

एथें $\frac{अ}{४} \div \frac{३अ}{४} = \frac{अ}{४} \times \frac{४}{३अ} = \frac{४अ}{१२अ} = \frac{३}{३}$ भागाकार, हें उत्तर.

दुसरे, $\frac{३अ}{२ब}$ त्यांस $\frac{५क}{४ड}$ त्यांनी भाग.

एथें $\frac{३अ}{२ब} \div \frac{५क}{४ड} = \frac{३अ}{२ब} \times \frac{४ड}{५क} = \frac{१२अड}{१०बक}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

तिसरे, $\frac{६अ+ब}{३अ-२ब}$ त्यांस $\frac{३अ+२ब}{४अ+ब}$ त्यांनी भाग.

एथें $\frac{६अ+ब}{३अ-२ब} \times \frac{४अ+ब}{३अ+२ब} = \frac{६अ^२+६अब+ब^२}{९अ^२-४ब^२}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

चवथें, $\frac{३अ^२}{अ+ब}$ त्यांस $\frac{अ}{अ+ब}$ त्यांनी भाग.

एथें $\frac{३अ^२}{अ+ब} \times \frac{अ+ब}{अ} = \frac{३अ^२ \times (अ+ब)}{(अ+ब) \times अ} = \frac{३अ}{अ^२-अब+ब^२}$ भागाकार, हें उत्तर.

पांचवें, $\frac{३क्ष}{४}$ त्यांस $\frac{११}{१२}$ त्यांनी भाग.

साहावें, $\frac{६क्ष^२}{५}$ त्यांस $\frac{३क्ष}{५}$ त्यांनी भाग.

सातवें, $\frac{३क्ष+१}{४}$ त्यांस $\frac{४क्ष}{५}$ त्यांनी भाग.

२. तेव्हां अपूर्णबीज कोणते ही परामिं भागायाचें आहे, तेव्हां त्या परामिं अंश भागिले, अथवा छेद गुणिले, या दोहोंकडूनही गुणाकार बरोबरच होतो.

३. तेव्हां दोनही अंशांचा अथवा दोनही छेदांचा दृढभाजक मिळतो, तेव्हां त्यांनी संक्षेप करून, नंतर पूर्वप्रकारें भागावें.

आठवें, $\frac{४९}{२९-१}$ त्यांस $\frac{९}{३}$ त्यांनीं भाग.

नववें, $\frac{४९}{५}$ त्यांस $\frac{३अ}{५ब}$ त्यांनीं भाग

दाहावें, $\frac{२अ-ब}{४कड}$ त्यांस $\frac{५अक}{६ड}$ त्यांनीं भाग.

अकरावें, $\frac{५अ-५ब}{२अ-४अब+२ब}$ त्यांस $\frac{६अ+५अब}{४अ-४ब}$ त्यांनीं
भाग .

बीजवर्गघनादि.

बीजवर्गघनादि म्हणजे सांगितलें मूळबीज फिरून फिरून त्याच मूळबीजांनें गुणून वाढविलें बीज. जसें कोणत्याही सांगितल्या पदाचा वर्ग काय होतो तो शोधायचा. तसाच घन चतुर्घात इत्यादिक त्याची रीति पुढें सांगतां.

* सांगितल्या मुळास अथवा पदास त्यांनेंच प्रकाशक सं

* एक अथवा अनेक पदे आहेत, त्यांचे गुणाकारांचे वर्गादिक त्या पदांचे वेगळाले त्या त्या वर्गादिकांचे गुणाकाराबरोबर आहे. जसा या तीन पदांचे गुणाकाराचा वर्ग.

रव्यंत एक कमीवेळापर्यंत पुनःपुनः गुणावे, शेवटील गुणाकार इच्छिले वर्गघनादिक होईल . अथवा सांगितल्या मुळांत किंवा पदांत अक्षरचिन्हेच असलीं तर त्या रीतीनें करावे, त्या अक्षरचिन्हांचा मूळप्रकाशक इच्छिले वर्गघनादिप्रकाशकानें गुणून जो गुणाकार घेईल तें इच्छिलें वर्गघनादिक होईल , आणि वेळाप्रकाशकही एक मूळच होय , त्यास्तव त्याचेंही वर्गादिप्रकाशकाप्रमाणें वर्गादिक करावे .

टीप . जेव्हां सांगितले मूळाचें कार्यप्रकाशक चिन्ह (+) धन आहे , तेव्हां त्यापासून जें वर्गादिक होईल तें सर्व धन

$3 \times 4 \times 5 = 99024$ आणि $3 \times 3 \times 3 = 9 \times 27 \times 81 = 99024$
 आणि अपूर्णबीजाचें कोणतेंही वर्गादिक त्या अपूर्णबीजाचें अंशाचें वर्गादिकलेदांचे . तसेंच वर्गादिकानें भागिलें याचे बराबर आहे .

जसा या अपूर्णबीजाचा घन $(\frac{2A}{अ})^3 = 2^3 = 8$

आणि $\frac{2A^3}{अ^3} = 2^3 = 8$

आणि एकच पदाचें वर्गादि अथवा वर्गमूळादि परस्पर गुणायाचें आहेत त्यागुण्यगुणकाचें वर्गादिकप्रकाशकांची बेरीज घेऊन त्या पदावर प्रकाशकस्थळी लिहावी . जसें, $अ^2 \times अ^2 = अ^{2+2} = अ^4$. $अ^3 \times अ^3 = अ^{3+3} = अ^6$.

तसेंच एकच पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूळादिक परस्पर भागायाचें आहे तर त्या भाज्यभाजकांचें वर्गादिक प्रकाशकांनी वजाबाकी करून त्यापदावर प्रकाशकस्थळी लिहावी . जसें, $अ^3 \div अ^2 = अ^3 - 2 = अ$. $अ^5 \div अ^2 = अ^3$.

होईल. परंतु जेव्हां त्या सांगितले मुळाचे कार्यप्रकाशक चिह्न
 (-) ऋण आहे, तेव्हां त्या पासून जें वर्गघनादिक करायाचें
 तें वर्गादिप्रकाशक सम असेल त्या स्वरूपां धन होईल, आणि
 तो विषम असेल त्या स्वरूपां ऋण होईल. हें सर्व गुणाकार-
 रीतीनें जाणावें.

उदाहरणे.

| | |
|---|---|
| अ = हें एक मूळ आहे. | अ ^१ = हें एक मूळ आहे. |
| अ ^२ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय. | अ ^२ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय. |
| अ ^३ = हा त्याचमुळाचा घन होय. | अ ^३ = हा त्या मुळाचा घन होय. |
| अ ^४ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात. | अ ^४ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात. |
| अ ^५ = हा त्या मुळाचा पंचघात. | अ ^५ = हा त्या मुळाचा पंचघात. |

इत्यादि.

इत्यादि.

| | |
|--|--|
| -२अ = हें एक मूळ आहे. | -२अ ^१ = हें एक मूळ आहे. |
| +४अ ^२ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय. | +९अ ^२ = हा त्या मुळाचा वर्ग. |
| -८अ ^३ = हा त्या मुळाचा घन होय. | -२७अ ^३ = हा त्या मुळाचा घन. |
| +१६अ ^४ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात. | +८१अ ^४ = हा त्या मुळाचा चतुर्घात. |
| -३२अ ^५ = हा त्या मुळाचा पंचघात. | -२४३अ ^५ = हा त्या मुळाचा पंचघात. |

इत्यादि.

इत्यादि:

| | |
|--|--|
| $\frac{-२अस^१}{२व} = \text{हैं एक मूळ आहे.}$ $+ \frac{४अ^१क्ष^१}{४व^२} = \text{हा त्या मुळाचा वर्ग होय.}$ $- \frac{६अ^१क्ष^१}{२७व^३} = \text{हा त्या मुळाचा घन.}$ $+ \frac{१६अ^१क्ष^१}{२९व^४} = \text{हा त्या मुळाचा चतुर्घात.}$ <p style="text-align: center;">इत्यादि.</p> | $\frac{अ}{२व} = \text{हैं एक मूळ आहे.}$ $\frac{अ^१}{४व^२} = \text{हा त्या मुळाचा वर्ग होय.}$ $\frac{अ^१क्ष^१}{२७व^३} = \text{हा त्या मुळाचा घन होय.}$ $\frac{अ^१क्ष^१}{२९व^४} = \text{हा त्या मुळाचा चतुर्घात.}$ <p style="text-align: center;">इत्यादि.</p> |
|--|--|

क्ष-अ = हैं एक मूळ आहे.

$$\frac{क्ष-अ}{१}$$

$$\frac{क्ष^२-अक्ष}{१}$$

$$- अक्ष + अ^२$$

$$\frac{क्ष^२-२अक्ष + अ^२}{१} = \text{हा त्या मुळाचा वर्ग होय.}$$

$$\frac{क्ष-अ}{१}$$

$$\frac{क्ष^२-२अक्ष^२ + अ^२क्ष}{१}$$

$$- अक्ष^२ + २अ^२क्ष - अ^३$$

$$\frac{क्ष^२-३अक्ष^२ + ३अ^२क्ष - अ^३}{१} = \text{हा त्या मुळाचा घन होय.}$$

क्ष+अ = हैं एक मूळ आहे.

$$\frac{क्ष+अ}{१}$$

$$\frac{क्ष^२+अक्ष}{१}$$

$$+ अक्ष + अ^२$$

$$\frac{क्ष^२+२अक्ष + अ^२}{१} = \text{हा त्या मुळाचा वर्ग होय.}$$

क्ष + अ

क्ष^० + २ अक्ष^१ + अक्ष^२

+ अक्ष^३ + २ अक्ष^४ + अक्ष^५

क्ष^० + ३ अक्ष^१ + ३ अक्ष^२ + अक्ष^३ = हा त्या मुळाचा घन होय.

हीं दोन उदाहरणे क्ष-अ आणि क्ष + अ त्या दोन मुळांचे वर्ग आणि घन दाखवितात.

दुसरीं उदाहरणे.

पहिलें, ३ अ^३ त्यांचा घन काय होतो ?

उत्तर २७ अ^६

दुसरें, २ अ^३ ब^३ त्यांचा चतुर्घात काय होतो ?

तिसरें, - ४ अ^३ ब^३ त्यांचा घन काय होतो ?

चवथें, - $\frac{अक्ष}{२ब}$ त्यांचा चतुर्घात काय होतो ?

पाचवें, अ-२क्ष त्यांचा पंचघात काय होतो ?

साहस्रिं, २ अ^३ त्यांचा षट्घात काय होतो ?

सरणैजाक न्यूटन त्याची द्वियुक्पदाचें वर्गादिक
करायची.

रीति*.

१ वेळाप्रकाशकावांचून पदें करायची, त्यांचा आरंभ
द्वियुक्पदाचे प्रथम पदापासून होतो, आणि त्यास वर्गादिप्रका
शक असावा तो द्वियुक्पदाचा इच्छिल्या वर्गादिकाचा प्रकाश
क आहे तोच होय. आणि त्याचे पुढील पदांस वर्गादिप्र-

* यारीतीचें सामान्यतः हें स्वरूप आहे (n) म्हणजे कोणतीही संख्या
(अ+क्ष)ⁿ=अⁿ+न·अ^{n-१}क्ष+न·नू-१अ^{n-२}क्ष^२+न·नू-१·नू-२अ^{n-३}क्ष^३ इत्यादि.
(अ-क्ष)ⁿ=अⁿ-न·अ^{n-१}क्ष+नू-१अ^{n-२}क्ष^२-न·नू-१·नू-२अ^{n-३}क्ष^३ इत्यादि.

टीप. प्रत्येक पवरामध्ये वेळाप्रकाशकांची वेरीज(२) या संख्येचे प्र-
त्येक पवराबरोबर आहे. जसें १+१=२ हें मूळ अथवा प्रथम पवर १+२+१=
४=२^२ हें वर्गस्थळ. अथवा दुसरा पवर १+३+३+१=४=२^२ हा घन अथवा तिस
रापवर, त्या प्रमाणें पुढेंही जाणावें.

| | | |
|-------|------------------------------------|--|
| अ+ब | अ ^२ +२अब+ब ^२ | अ ^३ +३अ ^२ ब+३अब ^२ +ब ^३ |
| १+१=२ | १+२+१=४ | १+३+३+१=८ |

अ^४+४अ^३ब+६अ^२ब^२+४अब^३+ब^४

१+४+६+४+१=१६

पवर म्हणजे घातमूळ. म्हणजे एक पवर. अथवा एक घात. वर्ग
म्हणजे द्विघात. घन म्हणजे त्रिघात. या प्रमाणें पुढेंही जाणावें.

काशक असावा तो हाच प्रतिपदीं अनुक्रमें एक एक उणा करून होतो . आणि द्वियुक्पदाचे राहिल्या दुसऱ्या पदास वर्गादिप्रकाशक असावा तो शून्यापासून ०.१.२.३ त्या अनुक्रमें प्रतिपदीं एक एक वाढवून होतो , तो इच्छिल्या वर्गादि प्रकाशकापर्यंत . म्हणजे इच्छिल्या वर्गादिकांचें प्रथम मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ प्रथम पद होईल , नें इच्छिल्या वर्गादिप्रकाशकानें युक्त , आणि त्या श्रेढीचें शेवटील पद त्या मूळद्वियुक्पदांतील केवळ दुसरें पद होईल . नें इच्छिल्या वर्गादि प्रकाशकानें युक्त . परंतु दुसरीं अथवा मध्यपदे मूळ द्वियुक्पदाचे गुणाकार होतील . अशा रीतीनें कीं , मूळ द्वियुक्पदाचे पहिल्या पदास प्रतिपदीं वर्गादिप्रकाशक एक एक उणा आणि दुसऱ्या पदास वर्गादिप्रकाशक प्रतिपदीं एक एक अधिक होत जाईल .

२ वेळाप्रकाशक काढायानी रीति श्रेढीचे प्रथमपदाना वेळाप्रकाशक १ आहे . दुसऱ्या पदाना वेळाप्रकाशक तो आहे कीं , जो इच्छिल्या वर्गादिकांचा प्रकाशक आहे . तिसऱ्या पदाना वेळाप्रकाशक त्याप्रमाणें निघतो कीं , दुसऱ्या पदाना वेळाप्रकाशक आणि त्याच दुसरें पदांतील पहिल्या अक्षराचा वर्गादिप्रकाशक हे दोन परस्पर गुणून तो गुणाकार

दोहोंनीं भागावा , भागाकार येईल तो त्या निसऱ्या पदाचा वेळा प्रकाशक होईल , आणि त्याप्रमाणें पुढें ही म्हणजे शोबटीं वेळाप्रकाशक निघाला आहे तो त्याच पदाचे प्रथम अक्षराचे वर्गादिप्रकाशकानें गुणून तो गुणाकार तेंच पद कित्याचें असेल तितक्या संख्येनें भागून जो भागाकार येईल तो त्याच पदापुढील जवळचे पदाचा वेळाप्रकाशक होईल . त्या रीतीनें एकापुढें एक अशा सर्व पदांचा वेळाप्रकाशक निघेल .

टीप . श्रेढीतील सर्व पदांची संख्या इच्छिल्या वर्गादिप्रकाशक संख्येहून एकानें अधिक होईल , आणि मूळ द्वियुक्पदांतील दोन ही पदें (+) धन आहेत तर श्रेढीचीं सर्व पदें (+) धन होतील . परंतु जर त्या मूळ द्वियुक्पदांत दुसरें पद (-) ऋण आहे तर श्रेढीचीं विषम पदें (+) धन होतील . आणि समपदें (-) ऋण होतील . त्याच कारणास्तव तीं सर्व पदें (+) धन (-) ऋण (+) धन (-) ऋण अशा अनुक्रमें होतील . पुनः प्रतिपदीं त्या त्या पदांतील अक्षराचे वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज इच्छिल्या वर्गादिकाचे प्रकाशकाबरोबर आहे , आणि श्रेढीचे मध्यापासून दोहोंकडील स्थळीं वर्गादिप्रकाशक बरोबर आहेत , परंतु अक्षरांचा मात्र बदल आहे ; आणि मध्यापासून दोहोंकडील बरोबरस्थळीं वेळाप्रकाशक

ही बराबर आहेत. तसें आदीपासून मध्यापर्यंत वेळापका-
शक जितक्या जितक्या अंतरानें वाढत गेला आहे ; तितक्या
तितक्या अंतरानें वेळापकाशक मध्यापासून अंतापर्यंत उणा
होत जातो.

उदाहरणे.

पहिलें, अ+क्ष त्यांचा पंचघात करायाचा आहे.

प्रथम रीतीनें वेळापकाशकावांचून पदें करावीं.

अ^१ अक्ष^५ - अक्ष^५ अक्ष^५ अक्ष^५ अक्ष^५ क्ष^५

आणि दुसऱ्या रीतीनें वेळापकाशक काढावे.

$$\begin{array}{cccccc} १ & ५ & \frac{५ \times ४}{२} & \frac{१० \times ३}{३} & \frac{१० \times २}{४} & \frac{५ \times १}{५} \\ १ & ५ & १० & १० & ५ & १ \end{array}$$

त्याजकरितां मूळ द्वियुग्मणाचा पंचघात हें सर्व जुळून आहे

अ^१+५अक्ष^५+१०अक्ष^५+१०अक्ष^५+५अक्ष^५+क्ष^५

परंतु हें उत्तम आहे कीं, वेळापकाशक आणि वर्गा

दिप्रकाशक हे तपशिलावांचून जुळून सर्व पदें एके ओर्ळांत
लिहावीं. जसें दुसरें उदाहरण पुढें लिहितों.

दुसरें, अ-क्ष त्यांचा षट्घात करायाचा

अ^१-६अक्ष^६+१५अक्ष^६-२०अक्ष^६+१५अक्ष^६-६अक्ष^६+क्ष^६

तिसरें, अ-क्ष त्वांचा चतुर्घात करायाचा.

अँ-४ अँक्ष + ६ अँक्षै-४ अक्षै + क्षँ

आणि त्या रीतीनें कोणतेही वर्गादिक स्रवनें एके ओळींत लिहितां येईल.

बीजवर्गादिमूळ.

बीजवर्गादिमूळ म्हणजे वर्गादिकाची उलट सांगितल्या पदापासून त्याचें वर्गादिमूळ काढायचें. तें पद एका की अथवा संयुक्त असेल.

प्रथमप्रकार.

एकाएकी पदाचें मूळ काढायाचा.

अंकगणितरीतीनें वेळापकाशकाचें मूळ काढावें, आणि अक्षरचिन्हाचा वर्गादिप्रकाशक इच्छिल्या वर्गादिमूळप्रकाशकानें भागावा, म्हणजे तो भागाकार अक्षरचिन्हाचें मूळ होईल. नंतर हें मूळ पूर्ववेळापकाशकमूळाशीं जोडलें असतां इच्छिलें वर्गादिमूळ होईल*.

* धन (+) पदाचें कोणतेही सममूळ (+) धन अथवा (-) ऋण असेल

उदाहरणे .

पहिले, ४ अँ त्यांचे वर्गमूळ काढ . उत्तर, २अ

दुसरे, ६ अँ त्यांचे घनमूळ काढ . उत्तर, २अ

तिसरे, $\frac{५अँबँ}{१कँ}$ त्यांचे वर्गमूळ काढ .

$$\sqrt{\frac{५अँबँ}{१कँ}} = \frac{अबँ}{१कँ} \sqrt{५} \text{ हे उत्तर .}$$

चवथे, $\frac{१६अँबँ}{२७कँ}$ त्यांचे घनमूळ काढ .

$$\text{उत्तर, } -\frac{२अबँ}{३कँ} \sqrt[३]{२अ} .$$

पाचवे, २अँ बँ त्यांचे वर्गमूळ काढ . उत्तर, अबँ $\sqrt{२}$

साहावे, -६४अँ बँ त्यांचे घनमूळ काढ . उत्तर, -४अबँ

सातवे, $\frac{६अँबँ}{१कँ}$ त्यांचे वर्गमूळ काढ .

म्हणजे जसें + अँ यांचे वर्गमूळ + अ अथवा - अ असेल . कारण + अ × + अ = + अँ आणि - अ × - अ = + अँ आहे .

परंतु कोणत्याही पदांचे विषममूळ त्या पदाचे विन्हात्माणे आहे . जसें + अँ यांचे घनमूळ + अ आहे आणि - अँ यांचे घनमूळ - अ आहे . कारण + अ × + अ × + अ = + अँ आहे आणि - अ × - अ × - अ = - अँ आहे . कोणत्याही पदांचे सममूळ ऋण होत नाही . कारण + अ × + अ अथवा - अ × - अ हे दोनही - अँ होण्यास परम अशक्य .

कोणत्याही गुणाकाराचे मूळ त्या गुण्यगुणाकांचे वेगळाले मूळाचे गुणाकारा बरोबर आहे आणि अपूर्णबीजाचे मूळानी इच्छा असेल तर त्या अंशाचे दांबी वेगळा र्ही मुळे काढावी . म्हणजे तीं मूळे त्या अपूर्णबीजाचे इच्छिते मूळ होईल .

उत्तर, $\frac{३अब}{क} \sqrt{\frac{३}{क}}$

आठवें ८१ अँबँ त्यांचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, ३ अब $\sqrt{ब}$

नववें, - ३२ अँबँ त्यांचें पंचघातमूळ काढ.

उत्तर, - २ अब $\sqrt{ब}$

दुसरा प्रकार .

संयुक्तपदाचें वर्गमूळ काढायान्ना .

त्याची रीति अंकगणिताप्रमाणें आहे. म्हणजे,

१ ज्या पदाचें घातादिक अधिक असेल तें पद प्रथम लिहून पुढें अनुक्रमें उतरतीं अशा रीतीनें सर्व पदें लिहावीं. नंतर प्रथम पदाचें मूळ भागाकारस्थळीं लिहावें .

२ त्या मुळाचा वर्ग प्रथमपदाखालीं लिहून त्यांतून वजा करावा . नंतर नवे भाज्या करितां बाकीजवळ वरचीं दुसरीं दोन पदें घ्यावीं, आणि नवे भाजका करितां मुळाची दुपट करून भाजकस्थळीं लिहावीं .

३ ती भाज्य भाजकानें भागावा आणि जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि भाजकासही जोडावें

४ आतां वाढविला भाजक भागाकारस्वरूपां जं आतां नवें लिहिलें त्यानें गुणून गुणाकार भाज्याखालीं लिहावा, आणि त्यांतून वजा करावा. त्याप्रमाणें अंकगणितरीतीनें करीत जावें.

उदाहरणें.

पहिलें, $\text{अ}^3 - ४\text{अ}^२\text{ब} + ६\text{अ}\text{ब}^२ - ४\text{अब}^३ + \text{ब}^४$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$\text{अ}^३ - ४\text{अ}^२\text{ब} + ६\text{अ}\text{ब}^२ - ४\text{अब}^३ + \text{ब}^४$ ($\text{अ}^२ - २\text{अब} + \text{ब}^२$ हें वर्गमूळ हें उत्तर.)

$२\text{अ}^२ - २\text{अब}$) - $४\text{अ}^२\text{ब} + ६\text{अ}\text{ब}^२$

- $४\text{अ}\text{ब} + ४\text{अब}^२$

$२\text{अ}^३ - ४\text{अब} + \text{ब}^४$) * + $२\text{अब}^३ - ४\text{अब}^३ + \text{ब}^४$

+ $२\text{अब}^३ - ४\text{अब}^३ + \text{ब}^४$

दुसरें $\text{अ}^३ + ४\text{अ}^२\text{ब} + १०\text{अ}\text{ब}^२ + १२\text{अब}^३ + ९\text{ब}^४$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$\text{अ}^३ + ४\text{अ}^२\text{ब} + १०\text{अ}\text{ब}^२ + १२\text{अब}^३ + ९\text{ब}^४$ ($\text{अ}^२ + २\text{अब} + \text{ब}^२$ हें

अ

वर्गमूळ हें उत्तर.)

$$२ \text{ अ} + २ \text{ अब}) + ४ \text{ अ}^२ \text{ ब} + १० \text{ अ}^३ \text{ ब}^२$$

$$+ ४ \text{ अ}^२ \text{ ब} + ४ \text{ अ}^३ \text{ ब}^२$$

$$२ \text{ अ}^३ + ४ \text{ अब} + ३ \text{ ब}^३) * + ६ \text{ अ}^३ \text{ ब}^२ + १२ \text{ अब}^२ + ९ \text{ ब}^३$$

$$+ ६ \text{ अ}^३ \text{ ब}^२ + १२ \text{ अब}^२ + ९ \text{ ब}^३$$

$$* \quad * \quad *$$

तिसरें, $\text{अ}^३ + ४ \text{ अ}^२ \text{ ब} + ६ \text{ अ}^३ \text{ ब}^२ + ४ \text{ अ} + १$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\text{अ}^३ + २ \text{ अ} + १$

चवथें, $\text{अ}^३ - २ \text{ अ}^२ \text{ ब} + २ \text{ अ}^३ \text{ ब}^२ - \text{अ} + १$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\text{अ}^३ - \text{अ} + १$

पांचवें, $\text{अ}^३ - \text{अब}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\text{अ} - \frac{\text{ब}}{२} - \frac{\text{ब}^२}{४\text{अ}} - \frac{\text{ब}^३}{१६\text{अ}^२}$ इत्यादि.

तिसरा प्रकार .

कोणत्याही वर्गादीचे मूळ काढायला.

त्याची रीति अंकगणिताप्रमाणेंच आहे. म्हणजे प्रथम पदाचें सांगितलें मूळ काढून तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि त्या मुळाचें वर्गादिक करून त्या प्रथमपदांतून वजा करावें. नंतर नवे भाज्याकरितां वरचें दुसरें पद खाली घ्यावें,

आणि नवे भाजकाकृतितां तें काढिलें मूळ सांगितल्या वर्गादि घातांत एक घातकमीपर्यंत वाढवून त्यास सांगितल्या वर्गादि प्रकाशकानें गुणून भाजकस्त्रुळीं लिहावें. आणि त्या नव्या भाजकानें तो नवा भाज्य भागितां जें येईल तें भागाकारस्त्रुळीं लिहावें. नंतर भागाकारस्त्रुळींचें तें सर्व मूळ सांगितला वर्गादिघातपर्यंत वाढवून सांगितले सर्व वर्गादींतून वजा करावें. नंतर बाकीचें प्रथम पद प्रथम भाजकानें भागितां जें येईल तें भागाकारस्त्रुळीं लिहावें, आणि तें भागाकारस्त्रुळींचे सगळें मूळ सांगितले वर्गादिघातपर्यंत वाढवून सांगितल्या वर्गादींतून वजा करावें. त्याप्रमाणें शेवटपर्यंत करावें, म्हणजे इच्छिलें वर्गादिमूळ मिळेल*.

* जेव्हां सांगितला घात फार मोठा आहे तेव्हां या रीतीनें तपशील करण्यामुळे फार श्रम पडतो असें कोणाचे मनांत येईल तर कोणिसमयीं संयुक्त पदांचें मूळ स्वल्पांत निघण्याची रीति ही आहे कीं, त्यांतील कित्येक सोईचीं पदे वेऊन त्यांचीं सांगितलीं मूळें काढावीं. आणि तीं मुळाचीं पदे कमारानें (+)धन(-)कृण विन्हांनीं जोडून लिहावीं. नंतर हें मूळ सांगितल्या घातापर्यंत वाढवावें. नंतर तें जर सांगितले घाताबराबर झालें तर हेंच मूळ स्वयं आहे. परंतु जर वाढविल्या घाताचीं मुमारानें पूर्वीं केलेलीं विन्हे सांगितले घाताबराबर नाहीत तर तीं पुनः तपासून तें मूळ आणि वाढविला घात या दोनही ठिकाणीं सांगितले घाताबराबर होतील अशीं करावीं.

जसे पांचवे उदाहरणांत ३अ-२ब हें मूळ प्रथम आणि शेवट

उदाहरणं .

पहिलें, अँ-२अँव+३अँबँ-२अबँ+बँ त्यांचें वर्ग-

मूळ काढ .

अँ-२अँव+३अँबँ-२अबँ+बँ (अँ-अबँ+बँ हें वर्गमूळ .

अँ

हेंउत्तर .

२अँ) -२अँव

अँ-२अँव+अँबँ=(अँ-अबँ)^२

२अँ) +२अँबँ

अँ-२अँव+३अँबँ-२अबँ+बँ=(अँ-अबँ+बँ)^३

दुसरें, अँ-६अँ+२१अँ-४४अँ+६३अँ-१४अँ+२७

त्यांचें घनमूळ काढ .

अँ-६अँ+२१अँ-४४अँ+६३अँ-१४अँ+२७ (अँ-२अँ+३घ

अँ

नमूळ.हेंउत्तर .

या दोन पदांचे मूळांचे वजाबाकी बराबर आहे . आणि तिसरे उदा-
हरणांत अ-ब+११ हें संयुक्त मूळ प्रथम चवथें आणि शेवट या तीन
पदांचे मूळांनी बेरीज आहे . आणि साहाये उदाहरणांत संयुक्त मूळ मथ
म आणि शेवट त्या दोन पदांपासून निघतें .

$$३\text{अ}^० \quad | - ६\text{अ}^१$$

$$\text{अ}^१ - ६\text{अ}^० + १२\text{अ}^० - ८\text{अ}^० = (\text{अ}^१ - २\text{अ}^०)$$

$$३\text{अ}^० \quad | \quad + ९\text{अ}^१$$

$$\text{अ}^१ - ६\text{अ}^० + १२\text{अ}^० - ४४\text{अ}^० + ६३\text{अ}^० - ५४\text{अ}^० + २७ = (\text{अ}^१ - २\text{अ}^० + ३)$$

* * * * *

तिसरे, $\text{अ}^१ - २\text{अ}^०\text{ब} + २\text{अ}^०\text{क्ष} + \text{ब}^१ - २\text{ब}^०\text{क्ष} + \text{क्ष}^१$ त्यांचे
वर्गमूळ काढ. उत्तर, $\text{अ} - \text{ब} + \text{क्ष}$.

चवथे, $\text{अ}^१ - ३\text{अ}^० + ९\text{अ}^० - १३\text{अ}^० + १८\text{अ}^० - १२\text{अ}^० + ८$
त्यांचे घनमूळ काढ. उत्तर, $\text{अ}^१ - \text{अ} + २$

पांचवे, $८१\text{अ}^० - २१६\text{अ}^०\text{ब} + २१६\text{अ}^०\text{ब}^१ - ९६\text{अ}^०\text{ब}^१ + १६$
बे त्यांचे चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, $३\text{अ} - २\text{ब}$.

साहावे, $\text{अ}^१ - १०\text{अ}^० + ४०\text{अ}^० - ८०\text{अ}^० + ८०\text{अ}^० - ३२$ त्यांचे
पंचघातमूळ काढ.

उत्तर, $\text{अ} - २$

सातवे, $१ - \text{क्ष}^१$ त्यांचे वर्गमूळ काढ.

आठवे, $१ - \text{क्ष}^१$ त्यांचे घनमूळ काढ.

करणी.

करणी म्हणजे ज्यांचें मूळ बराबर पूर्ण येत नाहीतें पद. आणि त्या करणीस मूळप्रकाशकानें अथवा मूळ चिन्हानें युक्त लिहितात. जसें, $\sqrt{3}$ अथवा $\sqrt{9}$ हीं दोनही $\sqrt{3}$ त्या संख्येचें वर्गमूळ दाखवितात. आणि $\sqrt{2}$ अथवा $\sqrt{4}$ हीं $\sqrt{2}$ त्या संख्येचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितात. म्हणजे $\sqrt{2}$ हें पद कोणत्या घातापर्यंत वाढवाचें हें मूळप्रकाशक अंश दाखवितात, आणि वाढविल्या पदाचे कोणत्या घातानें मूळ काढाचें तें छेद दाखवितात.

पहिलाप्रकार .

अखंडपदास करणीचें रूप द्यावयाचा .

सांगितल्या पदास करणीचा प्रकाशक असेल तितका घातपर्यंत वाढवाचें, नंतर त्या नवे वाढविल्या पदास सांगितल्या करणीचे मूळ चिन्हानें युक्त कराचें .

उदाहरणें .

पहिलें, ४ त्यांस वर्गमूळाचें रूप दे .

$\sqrt{4} = 4 \times 4 = 16$ तर $\sqrt{16}$ अथवा 4 हें उत्तर .

दूसरे, ३ अं त्यास घनमूलाचें रूप दे
 आतां $(३अं)^३ = ३अं \times ३अं \times ३अं = २७अं$ तर $\sqrt[३]{२७अं}$ अथवा
 $(२७अं)^{\frac{१}{३}}$ हें उत्तर.

तिसरे, ६ त्यास घनमूलाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[३]{२१६}$ अथवा $(२१६)^{\frac{१}{३}}$

चवथें, $\frac{१}{३}$ अब त्यास वर्गमूलाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{\frac{१}{९}}$ अथवा $(\frac{१}{९})^{\frac{१}{२}}$

पांचवें, २ त्यास चतुर्घातमूलाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[४]{१६}$ अथवा $(१६)^{\frac{१}{४}}$

साहायें, $अ^३$ त्यास पंचघातमूलाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[५]{अ^३}$ अथवा $(अ^३)^{\frac{१}{५}}$

सातवें, $अ+क्ष$ त्यास वर्गमूलाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{अ+२अक्ष+क्ष^२}$ अथवा $(अ+२अक्ष+क्ष^२)^{\frac{१}{२}}$

आठवें, $अ-क्ष$ त्यास घनमूलाचें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt[३]{अ^३-३अक्ष+३अक्ष^२-क्ष^३}$ अथवा $(अ^३-३अक्ष+३अक्ष^२-क्ष^३)^{\frac{१}{३}}$

दुसरा प्रकार.

पदांस सममूलक प्रकाशक रूप द्यावयाचा.

१ सांगितल्या पदांचे मूळप्रकाशकांस समच्छेद करावे, नंतर तीं प्रत्येक पदे वेगळाले अंशस्थळींचे संख्येइतके घातापर्यंत वाढवावीं, आणि त्या समच्छेदांचे अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा. म्हणजे तीं पदे सममूळप्रकाशक झालीं.

२ जर सांगितले सममूळप्रकाशक रूप द्यावयाचें आहे, तर पदाचा मूळप्रकाशक सांगितले प्रकाशकानें भागावा, म्हणजे ते वेगळाले भागाकार त्या त्या पदांचे नवे मूळप्रकाशक होतील. नंतर त्या त्या पदांस ते ते नवे प्रकाशक लिहून त्यांजवर सांगितला प्रकाशक लिहावा. म्हणजे इच्छिलें बराबर पद निघेल.

उदाहरणें .

पहिलें, ३ आणि ५ हे त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे .

आतां $\frac{३}{१}$ आणि $\frac{५}{१} = \frac{३}{१}$ आणि $\frac{५}{१}$

त्यांजकरितां $\frac{३}{१}$ आणि $\frac{५}{१} = (\frac{३}{५})$ आणि $(\frac{५}{३})$ म्हण

जेथ २४ आणि २५ सममूळप्रकाशक झाले हे उत्तर .

दुसरें, २ आणि ३ हे त्यांस $\frac{३}{१}$ हा सममूळप्रकाशक कर

आतां $\frac{३}{१} \div \frac{३}{१} = \frac{३}{१} \times \frac{१}{३} = \frac{१}{१}$ हा प्रथमपदाचा मूळप्रकाशक .

आणि $\frac{२}{१} \div \frac{३}{१} = \frac{२}{१} \times \frac{१}{३} = \frac{२}{३}$ हा दुसरे पदाचा मूळप्रकाशक .

घाजकरितां (अ) रे आणि (ब) रे अथवा $\sqrt{अ}$ आणि $\sqrt{ब}$ हीं इच्छितीं पदे पूर्वपदांचे बराबर किमतीचीं आहेत. तिसरें, ४ रे आणि ५ रे त्यांस $\frac{१}{२}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

उत्तर, (२५) रे आणि (२५) रे

चवथें, अ रे आणि क्ष रे त्यांस $\frac{१}{२}$ हा सममूळ प्रकाशक

कर.

उत्तर, (अ) रे आणि (क्ष) रे

पांचवें, अ रे आणि क्ष रे त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{अ}$ आणि $\sqrt{क्ष}$

साहायें, (अ+क्ष) रे आणि (अ-क्ष) रे त्यांस सम मूळप्रकाशक रूप दे.

सातवें, (अ+ब) रे आणि (अ-ब) रे त्यांस सम-मूळप्रकाशक रूप दे.

तिसराप्रकार .

करणीस अतिसरळरूप घावयाचा
रीति.

सांगितली संख्या अथवा पद त्यांचे गुण्यगुणकरूपा
 नें दोन अवयव करावे. असे कीं, जांतील एक अवयव त्या
 संख्येचे आंत सांगितले मूळाचा मोठा घात होईल. नंतर
 त्या मोठे घाताचे सांगितले मूळ काढून नें राहिले दुसरे
 अवयवाचे डावेकडे लिहावे, आणि त्या दोहोन्तरेमध्ये सांगि
 तले मूळाचे चिह्न करावे.*

उदाहरणे.

पहिलें, $\sqrt{४८}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

आतां $\sqrt{४८} = \sqrt{१६ \times ३} = ४\sqrt{३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{१०८}$ त्या करणीस अतिसरळरूप दे.

आतां $\sqrt{१०८} = \sqrt{३६ \times ३} = ६\sqrt{३}$ हें उत्तर.

प्रथम टीप. जेव्हां कोणतीही संख्या अथवा पद कर
 णीस मागे जोडिलें आहे, तेव्हां नें पद त्या गुण्यगुणकरूप

* जेव्हां सांगितले करणांत वरसांगितले गुण्यगुणकरूप दोन अवयवां
 नील एकही अवयव सांगितले मुळाचा बरोबर मोठा घात होत नाही, तेव्हां ती करणी
 सरळरूपच आहे. जसे, $\sqrt{१५}$ यास घातून दुसरें सरळरूप होत नाही. कारण, गु
 ण्यगुणकरूप दोन अवयव एक ५ आणि दुसरा ३ या दोहोतून एकही इच्छिले
 मूळाचा पूर्णघात म्हणजे एथें वर्ग होत नाही.

दोन अवयवांत जो पूर्ण घात असेल त्याचे मुळांनी गुणून तो गुणाकार पूर्वरीतीने त्या दुसरे अवयवाशी जोडून लिहावा .

उदाहरणे.

पहिले, $२\sqrt{३२}$ त्यांस अतिसरकरूप दे .

आतां $२\sqrt{३२} = २\sqrt{१६ \times २} = २ \times ४\sqrt{२} = ८\sqrt{२}$ हें उत्तर .

दुसरे, $५\sqrt{२४}$ त्यांस अतिसरकरूप दे .

आतां $५\sqrt{२४} = ५\sqrt{६ \times ४} = ५ \times २\sqrt{३} = १०\sqrt{३}$ हें उत्तर .

दुसरी टीप . अपूर्ण करणीसही अतिसरकरूप देतां येते . त्या पुढील रीतीकरून .

रीति .

अंश आणि छेद हे कोणत्याही संख्येनें अथवा पदानें गुणावे . असे कीं, गुणलेले छेद सांगितले मुळाचा पूर्ण घात होतील . नंतर त्या घाताचें सांगितलें मूळ काढून त्याजवर अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा, आणि त्यास करणीचा राहिला दुसरा अवयव जोडून मध्यें पूर्वप्रमाणें मूळचिह्न करावें * .

* करणीस अतिसरकरूप द्यावयाचा उपयोग असा आहे कीं, उत्तर दशांशांत सरळ निघते . हें या प्रथम उदाहरणाचा विचार केल्या असतां कळेल . पहा,

उदाहरणें .

पहिलें, $\sqrt{\frac{3}{16}}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे .

आतां $\sqrt{\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{3 \times 13}{16 \times 13}} = \sqrt{\frac{39}{208}} = \frac{1}{16} \sqrt{198}$ हें उत्तर .

दुसरें, $3\sqrt{\frac{3}{4}}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे .

आतां $3\sqrt{\frac{3}{4}} = 3\sqrt{\frac{3 \times 25}{4 \times 25}} = 3 \times \frac{5}{5} = 3 \times \frac{1}{5} \times 5 \times 5 = 3 \times \frac{5}{1} \times 5 = 15$ हें उत्तर .

तिसरें, $\sqrt{32}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे .

उत्तर, $4\sqrt{2}$

चवथें, $\sqrt{320}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे .

उत्तर, $8\sqrt{5}$

पांचवें, $\sqrt{36}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे .

उत्तर, $6\sqrt{1}$

तिसरें व चौथें $\sqrt{\frac{3}{16}}$ या उदाहरणांत १४ वें वर्गमूळ काढायचें, अथवा वर्ग मूळकोष्टकांतून तयार प्यावयाचें आणि त्या मुळास १ यांनी भागायाचें इतकें मात्र आहे. आणि सरळ रूप न दिलें तर छेदांनी अंश भागून भागाकाराचें मूळ काढावें लागतें. अथवा अंश छेदांनी घेऊन मुळ काढून अंशांचें मूळ छेदांचे दुर्भागे भागाचें लागतें. आणि त्या दोन्ही रीतीही मूळ काढण्यास अतिसरळ रूप निरीपेक्षा या उदाहरणां बहुत श्रम पडतात. आणि दुसरें उदाहरणांत तर अतिसरळ रूप न दिल्यास बहुतच श्रम पडतात.

साहावे, $\frac{२}{१०९}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे .

उत्तर, $\frac{३२}{७}$

सातवे, $\frac{१}{७५}$ अंब त्यांस अतिसरळरूप दे .

उत्तर, $\frac{५}{३७}$

आठवे, $\frac{७}{१००}$ त्यांस अतिसरळरूप दे .

उत्तर, $\frac{२०५}{३६५}$

नववे, $\frac{९}{८९}$ त्यांस अतिसरळरूप दे .

उत्तर, $\frac{८९}{८९}$

दाहावे, $\frac{१}{९५}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे .

उत्तर, $\frac{२}{३७}$

अकरावे, $\frac{१३५}{३२}$ त्यांस अतिसरळरूप दे .

उत्तर $\frac{३}{१०}$

बारावे, $\frac{५}{३}$ अं $\frac{१}{५}$ त्यांस अतिसरळरूप दे .

उत्तर, $\frac{५५}{३३}$ ब

तेरावे, $\frac{३}{३}$ $\frac{३}{३}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे .

उत्तर, $\frac{३६}{३६}$ $\frac{१४}{१४}$

चौदावे, $\frac{३}{३}$ $\frac{१६}{१६}$ त्यांस अतिसरळ रूप दे .

उत्तर, $\frac{३६}{३६}$ $\frac{१६}{१६}$

पंधरावे, $\frac{१}{९०}$ अंक्ष त्यांस अतिसरळ रूप दे .

सोळावें, $\sqrt{\text{क्ष}^2 - \text{अक्ष}^2}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप पदे .

चवथा प्रकार .

करणी पदांची मिळवणी करायाचा
रीति .

१ अपूर्ण पदे असतील तीं समच्छेद करावीं, आणि पूर्व प्रकाराप्रमाणें सर्व पदांस अतिसरळरूप द्यावें .

२ ज्या पदाचा मूळप्रकाशक विषम आहे, त्यास दुसरे प्रकाराप्रमाणें बरोबर किमतीचें सममूळप्रकाशकपदाचें रूप द्यावें .

३ आतां जर सर्व पदांत करणी अवयव एकरूपच असेल, तर त्या पदांचे अरबंड अवयवांची बेरीज घेऊन तीस ती करणी जोडून लिहावी, हीच त्यांची मिळवणी. परंतु सर्व पदांत करणी अवयव एकरूप नसेल, तर तीं सर्व पदे (+) धन (-) ऋण चिन्हें जोडून लिहावीं, हीच त्यांची मिळवणी .

उदाहरणें .

पहिलें, $\sqrt{१८}$ आणि $\sqrt{३२}$ त्यांची बेरीज काय होती ?

$$\text{आतां } \sqrt{१८} = \sqrt{९ \times २} = ३\sqrt{२}$$

$$\text{आणि } \sqrt{३२} = \sqrt{१६ \times २} = ४\sqrt{२}$$

तर, $७\sqrt{२}$ हें उत्तर.

दुसरें, $३\sqrt{७५}$ आणि $३\sqrt{९२}$ त्यांची बेरीज काय होती ?

$$\text{आतां } ३\sqrt{७५} = ३\sqrt{२५ \times ३} = ५३\sqrt{३}$$

$$\text{आणि } ३\sqrt{९२} = ३\sqrt{६४ \times ३} = ४३\sqrt{३}$$

$९३\sqrt{३}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt{२७}$ आणि $\sqrt{४८}$ त्यांची बेरीज काय होती ?

उत्तर, $७\sqrt{३}$

चवथें, $\sqrt{५०}$ आणि $\sqrt{७२}$ त्यांची बेरीज काय होती ?

उत्तर, $११\sqrt{२}$

पांचवें, $\sqrt{\frac{३}{५}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{५}}$ त्यांची बेरीज काय होती ?

उत्तर, $४\sqrt{\frac{३}{५}}$ अथवा $\frac{४}{\sqrt{५}}\sqrt{१५}$

साहवें, $३\sqrt{५६}$ आणि $३\sqrt{१८९}$ त्यांची बेरीज काय होती ?

उत्तर, $५३\sqrt{७}$

सातवें, $३\sqrt{५००}$ आणि $३\sqrt{१०८}$ त्यांची बेरीज काय होती ?

उत्तर, $८३\sqrt{४}$

आठवें, $३\frac{१}{४}$ आणि $३\frac{३}{४}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $३\frac{३}{४}$

नववें, $४\sqrt{१४७}$ आणि $३\sqrt{७५}$ त्यांची बेरीज काय
ती?

उत्तर, $४३\sqrt{३}$

दाहावें, $३\sqrt{३}$ आणि $२\sqrt{३}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $\frac{५}{१०}$

अकरावें, $३\sqrt{७}$ आणि $५\sqrt{१६}$ अं व त्यांची बेरी
काय होती?

बारावें, $\frac{३}{२}\sqrt{७}$ आणि $\frac{३}{२}\sqrt{४}$ व त्यांची बेरीज
य होती?

पांचवाप्रकार.

करणे पदांची वजाबाकी करायाचा

रीति .

पूर्व प्रकाराप्रमाणे दोन ही पदे सिद्ध करावीं नंतर कर
एकरूपच असेल तर अखंडपदांची वजाबाकी करावी,
णि राहिले बाकीस ती साधारण करणी जोडावी, म्हणजे
जाबाकी झाली. त्या पदांची करणी एक रूप नसेल तर तीं

पदें (-) ऋण चिन्ह जोड़ून लिहावीं, म्हणजे हीच वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{320}$ आणि $\sqrt{60}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } \sqrt{320} = \sqrt{64 \times 5} = 8\sqrt{5}$$

$$\text{आणि } \sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$$

$8\sqrt{5} - 2\sqrt{15}$ बाकीहें उत्तर.

दुसरें, $3\sqrt{920}$ आणि $3\sqrt{58}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } 3\sqrt{920} = 3\sqrt{23 \times 40} = 6\sqrt{230}$$

$$\text{आणि } 3\sqrt{58} = 3\sqrt{29 \times 2} = 3\sqrt{58}$$

$6\sqrt{230} - 3\sqrt{58}$ हें उत्तर.

तिसरें, $5\sqrt{20}$ आणि $3\sqrt{85}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } 5\sqrt{20} = 5\sqrt{4 \times 5} = 10\sqrt{5}$$

$$\text{आणि } 3\sqrt{85} = 3\sqrt{5 \times 17} = 3\sqrt{85}$$

$10\sqrt{5} - 3\sqrt{85}$ हें उत्तर.

चवथें, $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$ आणि $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{5}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{10}{15}}$$

$$\text{आणि } \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{2}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{6}{10}}$$

$\frac{3}{5}\sqrt{\frac{10}{15}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{6}{10}}$ हें उत्तर.

पांचवें, १७५ आणि १४८ त्यांची वजाबाकी कर .

उत्तर, १३

साहायें, ३ २५६ आणि ३ ३२ त्यांची वजाबाकी कर .

उत्तर, २३ ४

सातवें, १ $\frac{३}{४}$ आणि १ $\frac{३}{४}$ त्यांची वजाबाकी कर .

उत्तर, $\frac{३}{४}$ १ ३

आठवें, १ $\frac{३}{४}$ आणि १ $\frac{३}{४}$ त्यांची वजाबाकी कर .

उत्तर, $\frac{३}{४}$ १ ६

नववें, ३ $\frac{३}{४}$ आणि ३ $\frac{३}{४}$ त्यांची वजाबाकी कर .

उत्तर, $\frac{३}{४}$ ३ ७५

दाहावें, १ २४ अँबँ आणि १ ५४ बँ त्यांची वजाबाकी

कर .

उत्तर, (३ बँ - २ अँबँ) १ ६

साहावाप्रकार .

करणीपदें परस्पर गुणायान्ता .

रीति .

जेव्हां सर्व पदांत करणी एकजातीची आहे , तेव्हां त्या

पदांचे अखंड अवयवांचा गुणाकार करावा . तसाच खंड अवयवांचा ही गुणाकार करावा . नंतर ते दोनही गुणाकार जोडून त्यांचे मध्यं साधारण करणीचिन्ह लिहावें, म्हणजे हा इच्छिता गुणाकार होईल . त्या गुणाकारास तिसरे प्रकारा प्रमाणें अतिसरळरूप देतां येईल .

परंतु जर करणी अनेक जातीची आहे, तर त्या करणीस सममूळप्रकाशकरूप देऊन तीं पदें वर सांगितल्या प्रमाणें गुणावीं .

त्यासमयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ ५६) करावें जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गादिमूळ प्रकाशक विरूप आहे, तर त्यांचा, पदांचे प्रकाशकांची बेरीज करून ती त्या साधारणपदास रीतीप्रमाणें जोडावी, म्हणजे गुणाकार झाला .

उदाहरणें .

पहिलें, $३\sqrt{८}$ आणि $२\sqrt{६}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?

आतां $३\sqrt{८}$ हे गुण्य

आणि $२\sqrt{६}$ हे गुणक

$६\sqrt{४८} = ६\sqrt{१६ \times ३} = २४\sqrt{३}$ गुणाकार हें उत्तर .

दुसरें, $\frac{१}{२}$ अ आणि $\frac{३}{४}$ अ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां $\frac{१}{२}$ अ $\frac{३}{४}$

$\frac{३}{४}$ अ

$\frac{१}{२}$ अ $\frac{३}{४}$ अ = $\frac{१}{२}$ अ $\frac{३}{४}$ अ = $\frac{१}{२}$ अ $\frac{३५}{४०}$ अ = $\frac{३५}{८०}$ अ गुणाकार हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२}{३}$ अ आणि $\frac{३}{४}$ अ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?

$\frac{२}{३}$ अ = $\frac{२}{३}$ हा प्रथमपदाचा

= $\frac{३}{४}$ हा दुसरे पदाचा

आतां $\frac{२}{३}$ अ = $\frac{२५}{३६}$ अ = $(\frac{२५}{३६})$ अ = $\frac{२५}{३६}$ अ

$\frac{३}{४}$ अ = $\frac{३६}{४८}$ अ = $(\frac{३६}{४८})$ अ = $\frac{३६}{४८}$ अ

$\frac{२५}{३६}$ अ गुणाकार हें उत्तर.

चवथें, $\frac{५}{६}$ अ आणि $\frac{३}{४}$ अ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां $\frac{५}{६}$ अ = $\frac{५३}{६६}$ अ = $\frac{५३}{६६}$ अ

$\frac{३}{४}$ अ = $\frac{३६}{४८}$ अ = $\frac{३६}{४८}$ अ

$\frac{५३}{६६}$ अ = $\frac{५३६}{६६४८}$ अ = $\frac{५३६}{६६४८}$ अ हें

उत्तर.

पांचवें, $\frac{३}{४}$ अ आणि $\frac{२}{३}$ अ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?

उत्तर, २४

साहावे, $\frac{1}{2}$ अ ४ आणि $\frac{3}{4}$ अ १२ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर, $\frac{1}{2}$ अ ६

सातवे, $\frac{5}{8}$ अ $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{9}{10}$ अ $\frac{3}{4}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर, $\frac{3}{10}$ अ १४

आठवे, २ अ १४ आणि ३ अ ४ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर १२ अ ७

नववे, २ अ $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{3}{4}$ अ $\frac{3}{4}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो? उत्तर, २ अ $\frac{3}{4}$

दाहावे, (अ+ब) $\frac{1}{2}$ आणि (अ+ब) $\frac{3}{4}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

अकरावे, २ अ + $\frac{1}{2}$ ब आणि २ अ - $\frac{1}{2}$ ब त्यांचा गुणाकार काय होतो?

बारावे, (अ+२ $\frac{1}{2}$ ब) $\frac{1}{2}$ आणि (अ-२ $\frac{1}{2}$ ब) $\frac{3}{4}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

तेरावे, २ अ $\frac{1}{2}$ आणि ३ अ $\frac{1}{2}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

चौदावे, ४ अ $\frac{1}{2}$ आणि २ अ $\frac{1}{2}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो?

सातवाप्रकार .

एक करणीपदास दुसरे करणीपदानें भागायाचा .
रीति .

जेव्हां करणी एक जातीची आहे, तेव्हां अखंड पदांचा भागाकार करावा . तसाच खंडपदांचाही भागाकार करावा . आणि त्या दोन भागाकारांमध्ये साधारण करणीचिन्ह लिहावें, म्हणजे भागाकार झाला .

जर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सम मूळप्रकाशक रूप देऊन वरचेप्रमाणें भागाकार करावा .

त्यासमयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ ५६) असावें जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गमूळादिप्रकाशक भिन्नजाति आहेत, तर त्यांचा भागाकार प्रकाशकांचे व जाबाकीवरून होतो तो असाकीं, प्रकाशकांची व जाबाकी करून ती साधारण पदास रीतीप्रमाणें जोडावी, म्हणजे भागाकार झाला .

उदाहरणें .

पहिलें, $८\sqrt{१०८}$ त्यांस $२\sqrt{६}$ त्यांनीं भाग .

आतां $\frac{८\sqrt{१०८}}{२\sqrt{६}} = ४\sqrt{१८} = ४\sqrt{६ \times ३} = १२\sqrt{३}$ भागाका

र हैं उत्तर.

दूसरें, ८ थ ५१२ त्यांस ४ थ २ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{८ थ ५१२}{४ थ २} = २ थ २५६ = २ थ \sqrt{६४ \times ४} = ८ थ ४$ हैं उत्तर

तिसरें, $\frac{३}{२} \sqrt{५}$ त्यांस $\frac{३}{२} \sqrt{२}$ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{\frac{३}{२} \sqrt{५}}{\frac{३}{२} \sqrt{२}} = \frac{३}{२} \sqrt{\frac{५}{२}} = \frac{३}{२} \sqrt{\frac{१०}{२}} = \frac{३}{२} \sqrt{५}$ हैं उत्तर.

चवथें, $\sqrt{७}$ त्यांस $\frac{३}{२} \sqrt{७}$ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{\sqrt{७}}{\frac{३}{२} \sqrt{७}} = \frac{७}{३} = \frac{७}{३}$ हैं उत्तर.

पांचवें, $\frac{४}{३} \sqrt{५०}$ त्यांस $\frac{२}{३} \sqrt{५}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{२}{३} \sqrt{१०}$

साहावें, $\frac{६}{५} \sqrt{१००}$ त्यांस $\frac{३}{५} \sqrt{५}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{२}{५} \sqrt{२०}$

सातवें $\frac{६}{५} \sqrt{\frac{३}{५}}$ त्यांस $\frac{३}{५} \sqrt{\frac{३}{५}}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{३}{५} \sqrt{५}$

आठवें, $\frac{३}{५} \sqrt{\frac{३}{५}}$ त्यांस $\frac{३}{५} \sqrt{\frac{३}{५}}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{३}{५} \sqrt{३०}$

नवदें, $\frac{६}{५} \sqrt{अ}$ त्यांस अथवा $\frac{६}{५} \sqrt{अ}$ त्यांस $\frac{३}{५} \sqrt{अ}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{६}{५} \sqrt{अ}$

दाहावें, अ^३ त्यांस अ^३ त्यांनीं भाग .

अकरावें, अ^१ त्यांस ४ अ^१ त्यांनीं भाग .

टीप . करणीचा भागाकार भाज्यभाजकांचे मूळप्रकाशकचिन्हाचे वजाबाकीवरून होतो, त्यावरून निश्चय कळते कीं, कोणतेही अपूर्णाकांचे अथवा अपूर्णबीजांचे छेद अंशस्वर्णां घेतां येतील . अथवा अंश छेदस्वर्णां घेतां येतील . असे कीं, प्रकाशक चिन्ह धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन असें बदल करून .

पुनः $\frac{अ^म}{अ^म} = १$ अथवा $अ^{म-म} = अं$ त्यापासून निघते कीं, हे अक्षरचिन्ह कोणतेही एकपदाबराबर आहे, जें पद १ त्या संख्येचे बराबर आहे . त्याजकरितां ज्या स्वर्णां अं अशा रीतीचें अक्षरचिन्ह येतें तेथें १ हा अंक लिहितां येईल* .

* याजवर यादून अधिकविचार केला पाहिजे .

१ कोणतेही पदास शून्य मिळविलें अथवा त्यांतून वजा केलें तर तें पद अधिक किंवा उणे होत नाहीं . म्हणजे,
 $अ + ० = अ$ आणि $अ - ० = अ$.

उदाहरणें

पहिलें, जैसे $\frac{१}{१} = \frac{१^{-१}}{१}$ अथवा $\frac{१}{१} = \frac{१^{-१}}{१}$ आणि $\frac{१}{१} = \frac{१^{-१}}{१}$

अथवा $\frac{१}{१}$

दुसरें, $\frac{१}{१} = \frac{१^{-२}}{१}$ अथवा $\frac{१}{१} = \frac{१^{-२}}{१}$ आणि $\frac{१}{१} = \frac{१^{-२}}{१}$

$\frac{१}{१}$

तिसरें, $\frac{१}{१} = \frac{१^{-३}}{१}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह करून लिहि.

चवथें, $\frac{१}{१} = \frac{१^{-४}}{१}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि.

२ जर कोणतेही पदानें शून्य गुणिलें किंवा भागिलें तर गुणाकार किंवा भागाकार शून्य होईल. कारण किती वेळा शून्य घेतलें तर शून्यच होईल. शून्याचे किती भाग घेतले तरी शून्यच होईल. म्हणजे $० \times अ$ अथवा $अ \times ० = ०$ आणि $\frac{०}{अ} = ०$

३ यांतूनही निघतें की, शून्यानें भागिलें शून्य त्याचा भागाकार कांहीं एक सांतपद आहे कारण

$$० \times अ = ० \text{ अथवा } ० = ० \times अ \text{ याजकरितां } \frac{०}{अ} = अ$$

४ याहूनही अधिक जर कोणतेही सांतपद शून्यानें भागिलें तर भागाकार अनंत होईल. या पुढील उदाहरणांत पाहा.

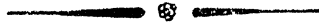
$\frac{१}{अ} = क$ जर कची किंमत सर्वकाळ बरोबर असेल तर साफ दिसतें की, जितका अलहान होत जाईल तितका क मोठा होईल. याजकरितां जर अ अनंत लहान आहे, तर क अनंत मोठा होईल. आणि जेव्हां अ शून्य आहे तेव्हां क अनंत होईल. म्हणजे,

$$\frac{१}{०} \text{ अथवा } \frac{१}{०} = \infty \text{ अनंत आहे.}$$

हा गुणविचार याविद्येंत शेबटीं मोठे मोठे कामांत बहुत उपयोगी आहे, याजकरितां पकेंपणें स्मरणांत असावा.

पांचवें, $\frac{1}{अक्ष}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह ऋण करून लिहि.

साहाचें, $अ(अ-क्ष)^{-१}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि.



आठवा प्रकार.

करणी पदास वर्गघनादिकें करून वाढवायाचा
रीति.

जेव्हां करणी पद एकाकी आहे. वर्ग करणें आहे तर त्या करणीपदाचें प्रकाशकचिन्ह दोहोनीं गुणाचें. आणि घन करणें आहे तर तिहीनीं गुणाचें, इत्यादि चतुर्घातादिकां. हें करणीचें खंड अवयवाचें इच्छिलें वर्गघनादिक होईल. नंतर त्या करणीपदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इच्छिलें वर्गघनादिक करून त्यास जोडाचें. म्हणजे करणीचे एकाकी पदाचें इच्छिलें वर्गघनादिक होईल. जर करणी संयुक्तपद आहे तर इच्छिलें वर्गघनादिक कराया करितां इच्छिलें वर्गघनादिक होईतां पर्यंत वर्गघनादिरीतीनें तें करणी संयुक्तपद पु-

नः पुनः गुणावें*.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{3}{2}$ अ^३ त्यांचा वर्ग काय होतो?

आतां $(\frac{3}{2} अ^3)^2 = \frac{9}{4} अ^6 = \frac{9}{4} अ^6$ अथवा $\frac{9}{4} अ^6$ हे उत्तर.

दुसरें, $\frac{3}{2} \sqrt{१३}$ त्यांचा घन काय होतो?

आतां $(\frac{3}{2} \sqrt{१३})^3 = \frac{27}{8} \times 13 \sqrt{13} = \frac{27}{8} \times 13 \sqrt{13} = \frac{27}{8} \times \sqrt{219} = \frac{27}{8} \times \sqrt{3 \times 73} = \frac{27}{8} \sqrt{219}$ हे उत्तर.

तिसरें, $\frac{3}{2} \sqrt{६}$ त्यांचा घन काय होतो?

आतां $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$ नंतर $\frac{27}{8} \sqrt{6}^3 = \frac{27}{8} \sqrt{216} = \frac{27}{8} \sqrt{36 \times 6} =$

$\frac{27}{8} \sqrt{6} \times 6 = \frac{27}{8} \times 6 \sqrt{6} = \frac{27}{4} \sqrt{6}$ हे उत्तर.

चवथें, $२\sqrt{२}$ त्यांचा वर्ग काय होतो?

उत्तर, $४\sqrt{४}$

पांचवें, $\sqrt{३}$ त्यांचा घन काय होतो?

उत्तर, $३\sqrt{३}$

* जेव्हां कोणतेंही पद वर्गमूळचिह्नानें युक्त आहे आणि त्याचा वर्ग करणें आहे तर तें वर्गमूळचिन्ह पुसून टाकवि. म्हणजे वर्ग जाला. जसें, $(\sqrt{अ})^2$ अथवा $\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ$ आणि $(\sqrt{अ+ब})^2$ अथवा $\sqrt{अ+ब} \times \sqrt{अ+ब} = अ+ब$.

साहायें, $\frac{3}{2} \sqrt{3}$ त्याचा घन काय होतो ?

उत्तर, $\frac{3}{2} \sqrt{3}$

सातवें, $\frac{3}{2} \sqrt{2}$ त्याचा चतुर्घात काय होतो ?

उत्तर, $\frac{3}{2}$

आठवें, $\frac{3}{2}$ त्याचा म घात काय होतो ?

नववें, $2 + \sqrt{3}$ त्याचा वर्ग काय होतो ?

दाहावें, $3 + 2\sqrt{5}$ त्याचा वर्ग काय होतो ?

अकरावें, $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ त्याचा घन काय होतो ?

नववाप्रकार .

करणीपदांचें वर्गघनादिमूळकाढायाचा .

जेव्हां करणीपद एकाकी आहे, आणि त्याचें वर्गमूळ काढणें तर, त्या करणीपदाचें प्रकाशकचिन्ह ३ त्यानें गुणावें, आणि घनमूळ काढणें तर $\frac{3}{2}$ त्यानें गुणावें इत्यादि चतुर्घातादिमूळां. हें करणीचें खंड अवयवाचें इच्छितें वर्गादिमूळ हो-

ईल. नंतर त्या करणीपदांत अखंड अवयव असल्यास त्या
 चें इच्छिलें वर्गादिमूळ काढून त्या करणीपदांतील त्या खंड
 अवयवाचे वर्गादिमूळास जोडावें म्हणजे करणीचे एकाकी
 पदाचें इच्छिलें वर्गादिमूळ होईल. जर करणी संयुक्त आहे
 तर पूर्वी सांगितले रीतीप्रमाणें त्याचें वर्गादिमूळ काढावें.*

उदाहरणें.

पहिलें, ९५३ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

आतां $(९५३)^{\frac{१}{२}} = ३१ \times ३^{\frac{१}{२}} \times ३^{\frac{१}{२}} = ३१ \times ३ = ९३३$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{१}{२} \sqrt{२}$ त्यांचें घनमूळ काढ.

आतां $(\frac{१}{२} \sqrt{२})^{\frac{१}{३}} = (\frac{१}{२})^{\frac{१}{३}} \times २^{\frac{१}{३}} = \frac{१}{२} \times २^{\frac{१}{३}} = \frac{१}{२} \sqrt[३]{२}$ हें उत्तर

तिसरें, $\frac{१}{३}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

* कोणतेही पद अ याचे म घाताचें नमूळ अथवा कोणतेही पद अ
 याचे नमूळाचा मघात = $a^{\frac{m}{n}}$

आणि कोणतेही पद अ याचे ममूळाचे नमूळ, अथवा कोणतेही
 पद अ याचे नमूळाचें ममूळ = a^m

यापासून कळते की, अ पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे
 बहुघातमूळाबरोबर आहे आणि अ पदाचे वर्गमूळाचें घनमूळ अथवा
 अ पदाचे घनमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे षट्घातमूळाबरोबर आहे. आ
 णि याप्रमाणें पुढेही. कोणतेही पदाचे मूळाचें मूळ काढणें असेल तर
 याप्रमाणें काढावें.

उत्तर, ६५६

चवथें, $\frac{1}{2}$ अ ब त्यांचें घनमूळ काढ .

उत्तर, ३ अ ५ ब

पांचवें, १६ अ त्यांचें चतुर्घातमूळ काढ .

उत्तर, २ अ

साहावें, $\frac{1}{3}$ अ त्यांचें ममूळ काढ .

सातवें, अ- ६ अ + १ ब त्यांचें वर्गमूळ काढ .

आठवें, $\frac{1}{4}$ अ + $\frac{1}{4}$ अ त्यांचें घनमूळ काढ .

दाहावाप्रकार .

द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास सामान्य करणीरूप
घातयाचा .

रीति .

सांगितलें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद त्यास त्यांतील
करणीचे घातापर्यंत वाढवावें, नंतर त्या घाताचें मूळचिन्ह
त्या द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास जोडून लिहावें, म्हणजे

त्या पदास सामान्य करणीरूप झालें.

उदाहरणें.

पहिलें, $२ + \sqrt{३}$ त्यास सामान्य करणी रूप दे.

आतां $(२ + \sqrt{३})^२ = ४ + ३ + ४\sqrt{३} = ७ + ४\sqrt{३}$ त्याज करितां
 $२ + \sqrt{३} = \sqrt{७ + ४\sqrt{३}}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{२} + \sqrt{३}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

आतां $(\sqrt{२} + \sqrt{३})^२ = २ + ३ + २\sqrt{६} = ५ + २\sqrt{६}$ त्याज करितां
 $\sqrt{२} + \sqrt{३} = \sqrt{५ + २\sqrt{६}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

आतां $(\sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४})^३ = ६ + ६\sqrt[३]{२} + ६\sqrt[३]{४} + ४\sqrt[३]{२} + ४\sqrt[३]{४} =$
 $\sqrt[३]{६ + ६\sqrt[३]{२} + ६\sqrt[३]{४} + ४\sqrt[३]{२} + ४\sqrt[३]{४}}$ अथवा $\sqrt[३]{१ + \sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४}}$ हें उत्तर.

चवथें, $३ - \sqrt{५}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

पांचवें, $\sqrt{२} - २\sqrt{६}$ त्यास सामान्य करणी रूप दे.

साहावें, $४ - \sqrt{७}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

सातवें, $२\sqrt{३} - ३\sqrt{९}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

अकरावा प्रकार .

द्वियुग्मदाचें अथवा धनर्णपदाचें वर्गमूळ काढायाचा .

रीति .

त्या खालचे दोन सारणीकोष्टकांत अक्षरस्थळी सांगितले करणीचे दोन अचयव लिहावे, म्हणजे सांगितले द्वियुग्मदाचें अथवा धनर्णपदाचें इच्छिलें मूळ होईल .

$$\sqrt{अ+ब} = \sqrt{\frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}} + \sqrt{\frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}$$

$$\sqrt{अ-ब} = \sqrt{\frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}} - \sqrt{\frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}$$

पाहायाचें आहे . जर त्या दोन सारणीकोष्टकांत अ आणि $\sqrt{अ-ब}$ अखंडपदें असतील, तर मूळ पदें दोनही करणी असतील . अथवा एक पद अखंड आणि दुसरें पद करणी असें असेल . म्हणून दोन प्रकारचीं मात्र उदाहरणें त्या रीतीच्या उपयोगी आहेत .

उदाहरणें .

पहिलें, $११ + \sqrt{७२}$ अथवा $११ + ६\sqrt{२}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ .

$$\text{आतां } \sqrt{\frac{११}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{१२१-७२}} = \sqrt{\frac{११}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{१२१-७२}} = \sqrt{\frac{११}{२} + \frac{६}{२}} =$$

$$\sqrt{\frac{16}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{आतां } +\sqrt{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}} = \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 \times 9 - 16}} = \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{5}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \text{ त्याजकरितां } \sqrt{99 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2} \text{ हें उत्तर.}$$

दुसरें, $3 - 2\sqrt{2}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{आतां } \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}} - \sqrt{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4}} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4}} = -\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = -1$$

त्याजकरितां $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ हें उत्तर.

तिसरें, $6 \pm 2\sqrt{5}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } \sqrt{5} \pm 1$$

चवथें, $23 \pm 6\sqrt{13}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } 3 \pm \sqrt{13}$$

पांचवें, $8 + 2\sqrt{7}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } 1 + \sqrt{7}$$

साहायें, $65 - 2\sqrt{5}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } \sqrt{5} - 1$$

वारावाप्रकार.

एक किंवा अधिक गुणक काढायाना.

तो गुणक असा कीं, ज्यानें करणी द्वियुक्पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड होईल.

रीति.

१ जेव्हां करणीचे एक पदाचा किंवा दोन्ही पदांचे मूळ प्रकाशक सम आहेत, तेव्हां सांगितले द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें एक चिन्ह बदल करावें, म्हणजे तोच गुणक झाला. नंतर त्या गुणकानें तें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद गुणावें. त्या प्रमाणें गुणाकारांत ही एक चिन्ह बदल करून पुनःपुनः गुणावें, गुणाकारास करणीरूप सटपर्यंत.

त्या रीतीनें त्रियुक्पदादि करणीसही करणीरूप सुटून अखंडरूप देतां येईल. असें कीं, त्रियुक्पदादि करणीसही एक चिन्ह बदल करावें. चतुर्युक्पदकरणीस दोन चिन्हे बदल करावीं. पंचयुक्पद करणीस तीन चिन्हे बदल करावीं, इत्यादि षड्युक्पदादिकीं ही.

२ जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळप्रकाशक विषम आहे, तेव्हां रीति याहून अधिक कठीण आहे, परंतु दोन व-

गमृळ्वांची बेरीज किंवा वजाबाकी करायास इच्छिला गुणक त्रियुक्पद करणी होईल. हे त्रियुक्पद त्या रीतीने उत्पन्न होते कीं, जीं दोन पदे आहेत त्यांचे वर्ग दोन पदे आणि त्याच पदांचा गुणाकार धन असल्यास ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावा. तो तिसरे मध्यपद होते.

उदाहरणें.

पहिलें, $५ + \sqrt{३}$ त्याचा एक गुणक काढायाचा, ज्यानें हे पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंडपद होईल.

$$\begin{array}{r}
 \text{सांगितली करणी } ५ + \sqrt{३} \\
 \text{गुणक } ५ - \sqrt{३} \\
 \hline
 २५ + ५\sqrt{३} \\
 - ५\sqrt{३} - ३ \\
 \hline
 २५ - ३ = २२ \text{ हे उत्तर.}
 \end{array}$$

दुसरें, $\sqrt{५} + \sqrt{३}$ त्याचा एक गुणक काढायाचा, ज्यानें हे पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

$$\begin{array}{r}
 \text{सांगितली करणी } \sqrt{५} + \sqrt{३} \\
 \text{गुणक } \sqrt{५} - \sqrt{३} \\
 \hline
 ५ + \sqrt{५}\sqrt{३} \\
 - \sqrt{५}\sqrt{३} - ३ \\
 \hline
 ५ - ३ = २ \text{ हे उत्तर.}
 \end{array}$$

निसंघं, २/५ + २/३ त्यांचा एक गुणक काढायाचा, ज्याने हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन तें अखंडपद होईल.

$$\begin{array}{r} \text{सांगितली करणी } २/५ + २/३ \\ \text{गुणक } २/५ - २/३ \\ \hline -१/५ + २/१५ \\ \quad - २/१५ - १/३ \\ \hline -१/५ - १/३ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{पुनःगुणक } -१/५ + १/३ \\ \hline ५ - ११५ \\ \quad + ११५ - ३ \\ \hline ५ - ३ = २ \quad \text{हें उत्तर.} \end{array}$$

चवथें, २/७ + २/३ त्यांचा गुणक काढायाचा, ज्याने हें पद गुणिलें असतां त्याचे करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

$$\begin{array}{r} \text{सांगितली करणी } २/७ + २/३ \\ \text{गुणक } \frac{२/३ - २/७ \times ३ + २/७^2}{७ + २/३ \times ३} \\ \quad - २/३ \times ३ - २/७ \times ३^2 \\ \quad \quad + २/७ \times ३^2 + ३ \end{array}$$

$$\text{गुणाकार. } ७ + ३ = १० \quad \text{हें उत्तर.}$$

पांचवें, १/५ - १/६ त्यांचा गुणक काढायाचा, ज्याने

हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

साहायें, $\sqrt{अ + १ ब}$ त्यांचा गुणक काढायान्ना; ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

सातवें, $अ + १ ब$ त्यांचा गुणक काढायान्ना . ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

आठवें, $१ + २ अ$ त्यांचा गुणक काढायान्ना . ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

नववें, $२ अ - ३ ब$ त्यांचा गुणक काढायान्ना, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

तेरावा प्रकार .

ज्या अपूर्णबीजाचे छेद एकाकी किंवा संयुक्त करणी आहेत, त्यांस बदल अखंडरूप देण्याचा .

रीति .

१ जेव्हां कोणतेही एकाकी अपूर्णबीज त्या पद्धतीचे आहे तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद त्याचे अंशांनी म्हणजे एथे $\sqrt{अ}$ त्यांनी गुणावे, म्हणजे त्यांचे रूप त्या पद्धतीचे होईल . $\frac{वअ}{अ}$

अथवा जेव्हां ते अपूर्णबीज त्या पद्धतीचे आहे तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt{अ}$ त्यांनी गुणावे, म्हणजे त्यांचे रूप त्या पद्धतीचे होईल . $\frac{वअ}{अ}$

आणि जेव्हां त्या सामान्य पद्धतीचे रूप आहे तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt{अ}$ त्यांनी गुणावे, म्हणजे त्यांचे रूप त्या पद्धतीचे होईल . $\frac{वअ}{अ}$

२ जेव्हां अपूर्णबीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत, तेव्हां पूर्व १२व्या प्रकाराप्रमाणे गुणक काढावा . असाकीं, ज्यानें ते छेद गुणिले असतां त्यांचे करणीरूप जाऊन अखंडरूप होतील . नंतर अंश आणि छेद त्या गुणकांनीं गुणिले असतां अ

पूर्ण बीजास इच्छिते अखंडछेदरूप होईल

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{३}{\sqrt{३}}$ आणि $\frac{३}{३\sqrt{५}}$ त्या दोन अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

आतां $\frac{३}{\sqrt{३}} = \frac{३}{\sqrt{३}} \times \frac{\sqrt{३}}{\sqrt{३}} = \frac{३\sqrt{३}}{३}$ हें एक उदाहरणाचें उत्तर.

आणि $\frac{३}{३\sqrt{५}} = \frac{३}{३\sqrt{५}} \times \frac{\sqrt{५}}{\sqrt{५}} = \frac{३\sqrt{५}}{३ \times ५} = \frac{३\sqrt{५}}{५} = \frac{३}{५} \sqrt{५}$ हें दुसरें उदाहरणाचें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३}{\sqrt{५}-\sqrt{२}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

आतां $\frac{३}{\sqrt{५}-\sqrt{२}} \times \frac{\sqrt{५}+\sqrt{२}}{\sqrt{५}+\sqrt{२}} = \frac{३\sqrt{५}+३\sqrt{२}}{३} = \frac{\sqrt{५}+\sqrt{२}}{१} = \sqrt{५}+\sqrt{२}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{\sqrt{३}}{३-\sqrt{२}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

आतां $\frac{\sqrt{३}}{३-\sqrt{२}} \times \frac{३+\sqrt{२}}{३+\sqrt{२}} = \frac{३\sqrt{३}+\sqrt{३}}{९-२} = \frac{३\sqrt{३}+\sqrt{३}}{७}$ अथवा $\frac{३}{७} + \frac{\sqrt{३}}{७}$ हें उत्तर.

चवथें, $\frac{\sqrt{५}}{\sqrt{५}+\sqrt{३}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

पांचवें, $\frac{५}{३+\sqrt{५}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

साहायें, $\frac{अ-\sqrt{ब}}{अ+\sqrt{ब}}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे.

सातवें, $\frac{3^0}{3^0+3^1}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे

आठवें, $\frac{3^1}{3^1+3^2}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे

नववें, $\frac{3^2}{3^2+3^3}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे .

गणितप्रमाण आणि श्रेढी .

गणितप्रमाण एकजातीचे दोन पदांचे वजाबाकीवरून त्यांचे संबंधि आहे . त्या वजाबाकीस गणितप्रमाणांत उत्तर म्हणतात .

चार पदे गणितप्रमाणांत आहेत असें म्हणतात , जेव्हां पहिलें आणि दुसरें त्यांचें उत्तर तिसरें आणि चवथें त्यांचें उत्तर सादरादर आहे .

जसें ३ , ७ , १२ , १६ आणि अ , अ+ब , क , क+ब . परस्पर गणितप्रमाणांत आहेत .

गणितश्रेढी तीच होय , जी किती एक पदांची श्रेणी एकच उतरांनं चढती किंवा उतरती आहे .

जसें १ , ३ , ५ , ७ , ९ , ११ , इत्यादि आणि

अ, अ+ब, अ+२ब, अ+३ब, अ+४ब, अ+५ब
इत्यादि. त्या श्रेणी गणितप्रमाणांत आहेत. ज्यांत प्रथमचें
उत्तर २ आणि दुसरीचें उत्तर ब आहे.

गणितप्रमाण आणि श्रेदी त्यांचे परमउपयोगी अवयव
पृथ्वी अंकगणितामध्ये उघड करून सांगितले आहेत, ते
बीजगणितामध्ये त्याप्रमाणें लिहितान. जसें,

| | |
|-----------------------|-------|
| अतिलहान पद दाखवायान | अ घे. |
| अति मोठें पद दाखवायान | झ घे. |
| उत्तर _____ | ड घे. |
| गळ _____ | न घे. |
| सर्वधन _____ | स घे. |

तेव्हां गणितप्रमाणांतील मुख्य गुण त्या पुढील समी
करणांत दाखविला जातो. म्हणजे,

$$१, झ = अ + ड \cdot (न - १)$$

$$२, अ = झ - ड \cdot (न - १)$$

$$३, स = (अ + झ) \frac{१}{२} न$$

$$४, स = (झ - \frac{१}{२} ड \cdot न - १) न$$

$$५, स = (अ + \frac{१}{२} ड \cdot न - १) न.$$

आणि जेव्हां प्रथम पद अ = ० आहे, तेव्हां वरचे
समीकरणास हे रूप होतें.

$$ज्ञ = ड \cdot (न - १)$$

$$स = \frac{१}{२} न ज्ञ$$

उदाहरणें.

पहिलें, एक चढती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १ उत्तर २ आणि गळ २९, तीचें सर्वधन काय होईल ?

प्रथम, $१ + २ \times २० = १ + ४० = ४१$ हें अतिमोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{१ + ४१}{२} \times २१ = २१ \times २१ = ४४१$ हें इच्छिलें सर्वधन.

दुसरें, एक उतरती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १९९९ उत्तर ३ आणि गळ ६७ आहे, तीचें सर्वधन काय होईल ?

प्रथम, $१९९९ - ३ \times ६६ = १९९९ - १९८ = १$ हें अतिलहान पद

तेव्हां $\frac{१९९९ + १}{२} \times ६७ = १०० \times ६७ = ६७००$ हें इच्छिलें सर्वधन.

तिसरें, १, २, ३, ४, ५, ६ इत्यादि मूळ संख्यांची श्रेणी, गळ १०० पर्यंत आहे. तीचें सर्वधन काय होईल ?

उत्तर, ५०५०

चवथें, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषमसंख्यांची श्रेणी, गळ ९९ पर्यंत आहे, तीचें सर्वधन काय होईल*.

* १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम अंकांचे गणितश्रेटीचे न गळ पर्यंत

पांचवें, इताल्या मुलकांत वेनीत्स्या त्या नामें एक शहर आहे, तेथें सूर्योदयापासून दुसरा सूर्योदयपर्यंत, प्रथम १ दुसरे वेळेस २ तिसरे वेळे ३ अशा रीतीने चौबिसावे वेळे २४ पर्यंत घडयाळांत अवर वाजतात. तेव्हां एक दिवसांत अवरांचे टोले किती वाजतात ? अवर म्हणजे १ तास अथवा २३ घटिका.

उत्तर ३०० टोले.

सर्वधन त्या गळ्याचे (न^३) वर्गावरावर आहे. जसें,

जर १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि पदें असतील.

तेव्हां १, ३, ५, ७, ९ हीं प्रथम, दुसरे, तिसरे, इत्यादि पदांची सर्वधनें होतील. त्या प्रमाणें.

$० + १ = १$ — अथवा १^२ हे प्रथम पदांचें सर्वधन.

$१ + ३ = ४$ — २^२ हे दोन पदांचें सर्वधन.

$४ + ५ = ९$ — ३^२ हे तीन पदांचें सर्वधन.

$९ + ७ = १६$ — ४^२ हे चार पदांचें सर्वधन.

$१६ + ९ = २५$ — ५^२ हे पांच पदांचें सर्वधन आहे. इत्यादि.

म्हणून वरचा प्रथम सिद्धांत किंवा समीकरण यानें $१ + ३ + (न-१) = १ + २न - २ = २न - १$ म्हणजे हे मोठें पद आहे, तेव्हां गळ्या न आहे; या मोठे पदाशी प्रथम पद १ मिळवून दोन शेवटपदांची बेरीज २नही होईल, अथवा त्या बेरीजेचे अर्ध न होईल; तेव्हां वरचे तिसरे समीकरणानें स सर्वधन = न-न^३ न^३ या रचनेस एक होतें कीं, सर्वदा दोन शेवटांचे बेरीजेचें अर्ध आणि गळ्या एकच आहे; आणि सर्वधन व त्या गळ्याचा वर्ग (न^३) एकच आहे.

साहाय्ये, २, ४, ६, ८, १०, १२ इत्यादि त्या स
मपदश्रेणींत ३६५ वें पद काय आहे ?

उत्तर, ७३०

सातवें, गणितश्रेढींतील एक उतरती श्रेणी आहे, जि
चे प्रथम पद १० उत्तर ३ आणि गूढ २१ तीचें सर्वधन किती
होईल ?

उत्तर १४०

आठवें, एके सरळरेघेंत एक एक यार्डाचे अंतरानें १००
खडे ठेविले आहेत, आणि प्रथम खड्यापासून एक यार्डाचे अं
तरानें पांटी ठेविली आहे, आणि एक मनुष्यास आज्ञा झाली कीं
त्यानें एकेक खेपेस त्या खड्यांतील एक एक खडा त्या पांटींत
टाकावा. तेव्हां सर्व खडे त्या पांटींत पर्यंत त्या मनुष्यास किती
चालावें लागेल ?

उत्तर, ^{मेल. यार्ड.} ५०० १३००

गणितश्रेढीचें व्यवहारी संगतीकरण.

उदाहरणें.

पहिलें, एक पलटन त्रिकोणाकृति उभें आहे; त्याचे प-
हिले ओळींत १ मनुष्य, दुसरींत ३ तिसरींत ५ अशा रीतीनें च-
ढत्या तीन ओळी आहेत, तर त्या त्रिकोणाकृति पलटणांतील स

व मनुष्ये कित्ती होतील ?

उत्तर, ९०० मनुष्ये .

दुसरे, फौजेतील एके दोळीस सरकारआज्ञा झाली कीं, त्यांनीं पुढें सांगतो अशा मजला करून १२ दिवसांत एके असुक गांवीं पोंचविं, त्यांत प्रथम दिवशीं ६ मैल, दुसरे दिवशीं १० ३/४ मैल इत्यादि प्रत्यहीं ४ ३/४ मैल अधिक त्याप्रमाणें, तेव्हां त्यांस शेवटचे दिवशीं कित्ती मैल चालावें लागेल, आणि सर्व मजला मिळून कित्ती मैल होतील ?

उत्तर, ५५ ३/४ मैल शेवटील मजल
आणि ३६९ मैल सर्व मिळून

तिसरे, एके किल्यास वेदा देऊन फौज बसली होती, त्यांतील इंजनेरांचे एक ब्रिगेडानें तो किल्ला घेण्यास आरंभ

* ब्रिगेड म्हणजे जमात, इंजनेरांचे एक ब्रिगेडांत आठ मनुष्ये असतात, ज्यांच्या दोन दोळ्या करितात, जेव्हां एक दोळी हातांनीं काम करून साप वाटविते, तेव्हां दुसरी दोळी त्यास सामान पुरविते. आणि जेव्हां प्रथम दोळी थकली तेव्हां तिचे बदली दुसरी दोळी काम करिते. तें अशा रीतीनें कीं, ते सर्व आपआपले पाळीप्रमाणें सापानी शिरावर काम करितात; साप म्हणजे खाडा, ज्याची रुंदी ३ फूट आणि ओंठी ४ फूट. याशिवाय या कामांत दुसरे खाडे करितात. ज्यांची रुंदी १० फूट पासून १५ फूट पर्यंत असते. त्यांस तेंच म्हणतात.

केला; प्रथम रात्री त्यानें १५ यार्ड साप खणिला, दुसरे रात्रीस १२ यार्ड, इत्यादि प्रतिरात्रीस २ यार्ड उणे, आणि शेवटील रात्रीस ३ यार्ड मात्र खणिला, तेव्हां किती रात्री काम केले, आणि सर्व मिळून साप किती यार्ड खणिला तें सांग.

उत्तर. { १७ रात्री काम केले.
६३ यार्ड साप खणिला.

चौथें, किती एक गेबीयन साहा ओळींत एकावर एक असे उभे करायास दिले, ते असे कीं, प्रति ओळीचे गेबीयनांचे संख्येचें उत्तर बरोबर, आणि खालचे ओळींत ९ गेबीयन आणि वरचे ओळींत ४ तेव्हां साहा ओळी मिळून गेबीयन किती आणि प्रति ओळीचे गेबीयनसंख्येंत अंतर किती तें सांग.

उत्तर { १ गेबीयन प्रति ओळीचें अंतर.
३९ गेबीयन साहा ओळी मिळून

* गेबीयन म्हणजे कणग्यासारखी शिल्किंदररूपानी वेत अथवा चिंबी इत्यादिकांनी केलेली दोपळी आहे. जिची दोनही नेडें उघडीं असतात! त्यांत जिचा व्यास २ फूट आणि उंची ३ फूट, त्या दोपल्या नेडांचे बाजूवर ठेवून त्यांत माती भरतात, आणि जिचा व्यास व उंची याहून अधिक आहे, त्या मोरचे इत्यादि कामांत उपयोगी आहेत; तसें जिचा व्यास आणि उंची याहून उणी आहे, त्या लहान कामांत उपयोगी आहेत; परंतु या जातीच्या दोपल्या बहुत उपयोगी आहेत.

पांचवें, दोन फौजांच्या टोळ्या १११ मैलांचे अंतराचें होत्या, नंतर जें एक चांगलें स्थळ दोहों टोळ्यांपासून बरोबर अंतराचें होतें, तेथें जाऊन राहवें असें दोहोंचे चिन्ती येऊन निघाल्या, परंतु वेगळाले समयांत, प्रथम टोळी प्रत्यहीं पूर्व दिवसापेक्षां $४\frac{1}{2}$ मैल मजल अधिक करित होती; आणि दुसरी टोळी ६ माहा मैल अधिक, दोन टोळ्या त्या चांगले स्थळां एकदांच येऊन पावल्या; म्हणजे प्रथम टोळी कुच केले दिवसापासून पांचवे दिवशीं, आणि दुसरी टोळी कुच केले दिवसापासून चवथे दिवशीं, तेहां प्रतिटोळीनें प्रतिदिवशीं किती मैल मजल केली तें सांग.

उत्तर { प्रथम टोळीची श्रेढी. २०, ६, ११, १५, २०
दुसरे टोळीची श्रेढी. ४, १०, १६, २२

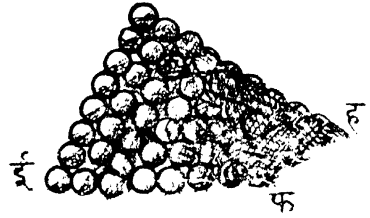
सम आकृतींत ठेविलेले गोळ्यांचे राशीचें गणित.

तोफेचे गोळ्यांच्या राशी बहुन करून तीन रीतींनीं करितात, त्यांस पायांचे आकृतीवरून वेगळालीं नामें होनात. पाया त्रिकोण असल्यास त्रिकोण राशि म्हणतात; पाया चौरस असल्यास चौरस राशि; आणि पाया काढकोनचौकोन असल्यास काढकोनचौकोन राशि.

प्रथम आकृति



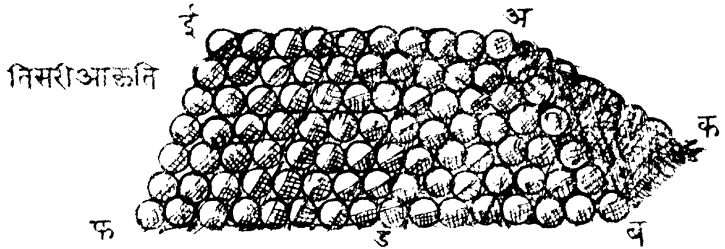
दुसरी आकृति.



अ ब क उ प्रथम आकृति त्रिकोण राशि आहे.

ई फ ग ह दुसरी आकृति चौरस राशि आहे.

अ ब क उ ई फ तिसरी आकृति काटकोन चौकोन राशि आहे.



तिसरी आकृति

गोळ्यांचे त्रिकोणाकृति थर एकावर एक रचिल्यापासून त्रिकोण राशि उत्पन्न होते; अशा रीतीने की, प्रतिथराची एकेक वाजू आग्नापासून एकेक गोळ्याने उणी होत जाति; अशी की, शेवदास त्या रशीवर एकच गोळा असतो.

गोळ्यांचे चौरस थर एकावर एक रचिल्या पासून चौरस राशि उत्पन्न होते, अशा राशींनीं कीं, प्रतिथराचे एकूण बाजूस आरंभा पासून एकूण गोळा उणा होत जातो. असा कीं, शेवट्यास त्या राशीवर एकूण गोळा असतो.

त्रिकोण आणि चौरस राशीमध्ये, बाजू किंवा मुखें म-
मबाजू त्रिकोण आहेत; आणि त्या बाजूंतील गोळे गणितश्रेढी
आहेत. जिचें प्रथम पद १ शेवटील पद आणि मूळ पदांचे
थरांतील गोळ्यांचे संख्येबरोबर; कारण, थरांची संख्या अथवा
आकृतीचे कोणतेही एक कोनावरील गोळ्यांची संख्या सर्वदा
पायाचे एक बाजूंतील गोळ्यांचे संख्येबरोबर आहे; त्रिकोण अ-
थवा चौरस राशीच्या बाजू किंवा मुखें त्यास गणितत्रिकोण
म्हणतात; आणि त्या गणितत्रिकोणांतील गोळ्यांचे संख्येस
त्रिकोणसंख्या म्हणतात; **अबक** प्रथम आकृतीतील आ-
णि **ई फ ग** दुसरे आकृतींतील गणितत्रिकोण आहेत.

काटकोनचौकोनराशि कल्पनें करून त्याप्रमाणें उत्पन्न हो-
तें, म्हणजे **अबकड** चौकोनराशीवर **अड** मुख किंवा
बाजूवर तितके गणितत्रिकोण ठेविले. जितके पायाचे बड
बाजूचे बाहेर त्याच बाजूंत गोळे आहेत; ते सर्व त्या मुखा-
चे बरोबर आहेत; आणि त्या गणितत्रिकोणांची संख्या सर्वदा

त्याचे बरोबर आहे, जे बरचे ओळीचे गोळ्यांत एक उणा. अथवा पायाचे लहान आणि मोठे बाजूचे वजाबाकी बरोबर आहे.

साहायें, अबकडु प्रथम आकृति म्हणजे त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे ?

पृथक्करण, सांगितले राशींत गोळ्यांचे समपातळी थर आठ आहेत, आणि ते प्रत्येकीं समबाजू त्रिकोण आहेत, म्हणून त्या प्रत्येकांतील गोळे गणितश्रेढी आहेत, ज्यांचें प्रथम पद शेवटील पद, आणि गळ हीं कळीं आहेत; त्यापासून निघतं कीं, त्या आठ थरांची अथवा आठ श्रेढींची बेरीज त्या त्रिकोणराशींतील सर्व गोळ्यांची संख्या आहे; तेव्हां,

त्रिकोणराशींतील प्रथम अथवा

$$\text{खालचे त्रिकोणथरांतील गोळ्यांची संख्या} = (८+१) \times ४ = ३६$$

$$\text{दुसरा} = (७+१) \times ३ = २४$$

$$\text{तिसरा} = (६+१) \times ३ = २१$$

$$\text{चौथा} = (५+१) \times २ = १५$$

$$\text{पाचवा} = (४+१) \times २ = १०$$

$$\text{साहावा} = (३+१) \times १ = ४$$

$$\text{सातवा} = (२+१) \times १ = ३$$

$$\text{आठवा} = (१+१) \times १ = १$$

गोळे सांगितले राशींतील.

बेरीज १२०

सातवें, ई फ ग ह दुसरी आकृति, त्या चौरस राशीं नील गोळ्यांनी संख्या काढ. जिचे ई फ खालचे थराचे ओळींत आठ गोळे आहेत.

पृथक्करण,

खालचे ओळींत गोळे ८ आहेत, आणि तिचे वरचींत ७ च आहेत; म्हणून त्या ओळी त्या श्रेणींत आहेत ८, ७, ६, ५, ४, ३, २, १ त्यांत प्रत्येक पद त्या त्या चौरस थरांचे वर्गमूळ आहे ज्या थरापासून चौरस राशि उत्पन्न झाली; त्या पासून निघते कीं, त्या मूळपदांचे वर्गांनी वेरी ज इच्छिली गोळ्यांनी संख्या आहे; म्हणजे वर्गांनी बेरीज $८ + ७ + ६ + ५ + ४ + ३ + २ + १ = २०४$ आहेत. हे सांगितले राशींनील इच्छिले गोळे झाले.

आठवें, अ ब क ड ई फ तिसरी आकृति: त्या काटकोनचौकोन राशींनील गोळ्यांनी संख्या काढ. जिचे द फ = १५ आणि ब क = ७

पृथक्करण, इच्छिली काटकोनचौकोन राशि, अ ब क ड चौरसराशि, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत ७ गोळे आहेत; आणि त्याशिवाय ९ गणितत्रिकोण, ज्यांचे आदि अ त आणि गच्छ कळल आहेत, त्यांनींमिकून झाली आहे, त्या

जकरितां जर चौरस राशींचे गोळ्यांची संख्या = १४०
 त्यांत श्वेटींची बेरीज मिळाली = २५२

सर्वमिळून काढकानचौकोन राशींतील गोळ्यांची सं-
 ख्या = ३९२ गोळी.

पहिलीटीप.

त्या पुढील कोष्टकांतील त्रिकोणराशि आणि चौकोनराशि
 आणखीही प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच का-
 दितां येईल; अ कोष्टक खालचे थरांचे एक ओळीचे गोळ्यां
 ची संख्या १त्यापासून ४० पर्यंत दाखवितो; ब कोष्टक त्रिकोण
 संख्या अथवा प्रत्येक थरांतील संख्या; क कोष्टक त्रिकोणसं-
 ख्यांची बेरीज दाखवितो; म्हणजे त्रिकोणराशींतील संख्यांची बे-
 रीज, ज्या संख्यांस बहुतेक शंकुसंख्या म्हणतात; ड कोष्टक
 अ कोष्टकांतील संख्यांचे वर्ग दाखवितो; म्हणजे प्रत्येक सम-
 थरांतील गोळ्यांची संख्या; आणि ई कोष्टक त्या चौरस थरां-
 ची बेरीज अथवा चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो.

| क | ब | अ | ड | इ |
|------------|---------------|--------|----------------|---|
| शंकुसंख्या | त्रिकोणसंख्या | मूळअंक | मूळअंकाचे वर्ग | त्या वर्गाची बेरीज |
| १ | १ | १ | १ | १ |
| २ | ३ | ४ | ४ | १+४=५ |
| ३ | ६ | ९ | ९ | १+४+९=१४ |
| ४ | १० | १६ | १६ | १+४+९+१६=३० |
| ५ | १५ | २५ | २५ | १+४+९+१६+२५=५५ |
| ६ | २१ | ३६ | ३६ | १+४+९+१६+२५+३६=९१ |
| ७ | २८ | ४९ | ४९ | १+४+९+१६+२५+३६+४९=१४० |
| ८ | ३६ | ६४ | ६४ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४=२०४ |
| ९ | ४५ | ८१ | ८१ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१=२८५ |
| १० | ५५ | १०० | १०० | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००=३८५ |
| ११ | ६६ | १२१ | १२१ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१=५११ |
| १२ | ७८ | १४४ | १४४ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४=६६६ |
| १३ | ९१ | १६९ | १६९ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९=८४१ |
| १४ | १०५ | १९६ | १९६ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६=१०३५ |
| १५ | १२० | २२५ | २२५ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५=१२६० |
| १६ | १३६ | २५६ | २५६ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६=१५२५ |
| १७ | १५३ | २८९ | २८९ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९=१८३१ |
| १८ | १७१ | ३२४ | ३२४ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४=२१७८ |
| १९ | १९० | ३६१ | ३६१ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१=२६५७ |
| २० | २१० | ४०० | ४०० | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००=३२७० |
| २१ | २३१ | ४४१ | ४४१ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१=४०२१ |
| २२ | २५३ | ४८४ | ४८४ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४=४८७६ |
| २३ | २७६ | ५२९ | ५२९ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९=५८६५ |
| २४ | ३०० | ५७६ | ५७६ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९+५७६=६६९० |
| २५ | ३२५ | ६२५ | ६२५ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९+५७६+६२५=७६६५ |
| २६ | ३५१ | ६७६ | ६७६ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९+५७६+६२५+६७६=८८०० |
| २७ | ३७८ | ७२९ | ७२९ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९+५७६+६२५+६७६+७२९=९९८५ |
| २८ | ४०६ | ७८४ | ७८४ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९+५७६+६२५+६७६+७२९+७८४=११२१० |
| २९ | ४३५ | ८४५ | ८४५ | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९+५७६+६२५+६७६+७२९+७८४+८४५=१२६६५ |
| ३० | ४६५ | ९०० | ९०० | १+४+९+१६+२५+३६+४९+६४+८१+१००+१२१+१४४+१६९+१९६+२२५+२५६+२८९+३२४+३६१+४००+४४१+४८४+५२९+५७६+६२५+६७६+७२९+७८४+९००=१४२३० |

म्हणून जर त्रिकोणराशींतील खालचे थराचे एके ओळींत १९ गोळे असतील, तर सर्व राशींतील गोळे १३३० होतील; आणि तसेच चौरस राशींतील गोळे २४७० होतील; त्यारीतीनें ही चौरस किंवा त्रिकोण राशींच्या संख्या सांगितल्या असतां स्वल्या नें खालचे थराचे ओळींची संख्या कळेल.

पूर्वकोष्टकापासून काटकोनचौकोनराशींची ही संख्या थोडक्यानें कळेल, ज्यांत लहान बाजूंत ४० पक्षां अधिक गोळे नसतील; तसे लहान आणि मोठी त्या बाजूंनी वजावाकी ४० पक्षां अधिक नसेल. जसे एक काटकोनचौकोन राशीचे लहान बाजूंत १५ आणि मोठे बाजूंत ३५ गोळे असतील; आरंभी चौकोन राशींची म्हणजे कल्पनेनें जीपासून काटकोनचौकोन राशि झाली आहे, तिची संख्या कोष्टकांतून काढावी; म्हणजे एक चौरसराशीची संख्या काढावी, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत १५ गोळे आहेत; म्हणजे ही कोष्टकांत १२४० आहे. नंतर गणितत्रिकोणाचे खालचे ओळींत संख्या १९ आहे त्याचे समोरची त्रिकोणसंख्या १२० त्यांस २०नीं गुणावें; कारण, चौरसाचे बाहेर २० त्रिकोण आहेत. नंतर त्यांस चौरस राशींची संख्या मिळवावी, म्हणजे $१२० \times २० + १२४० = २४०० + १२४० = ३६४०$ ही सांगितले काटकोनचौकोनराशींतील गोळ्यांची इच्छिली संख्या झाली.

दुसरीटीप.

पुढील वीजाचे सारणीकोष्टक कोणतेही राशीतील गोळ्यांची संख्या स्वल्प श्रमानें आणि त्वरेनें काढायास कामांत येतान.

$$\begin{array}{l} \text{त्रिकोणराशीचें गणित} \\ \text{करायास हा सारणीकोष्टक आहे.} \end{array} \left\{ \frac{(n+2) \times (n+1) \times n}{6} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{चौरसराशीचें गणित} \\ \text{करायास हा सारणीकोष्टक आहे.} \end{array} \left\{ \frac{(n+1) \times (2n+1) \times n}{6} \right.$$

त्या प्रत्येकांत n अक्षर खालचे थराचे एक ओळीची संख्या दाखवितें; म्हणजे जिचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत, त्या त्रिकोणराशीमध्ये सगळी संख्या हीच होईल.

$$\frac{(30+2) \times (30+1) \times 30}{6} = 8060 \text{ गोळे}$$

चौरसराशीमध्ये, जिचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत तिची संख्या हीच होईल. $\frac{(30+1) \times (60+1) \times 30}{6} = 9855 \text{ गोळे}$

काटकोनचौकोनराशीचा सारणीकोष्टक हा आहे,
 $\frac{(2n+1+3m) \times (n+1) \times n}{6}$ ज्यांत n अक्षर थरांची संख्या दाखवितें, आणि m अक्षर वरचे थरांची एकोनसंख्या दाखवितें. जसें, एक काटकोनचौकोनराशीमध्ये ३० थर आहेत, आणि वरचे

धरांत ३१ गोळे आहेत. $\frac{(६०+१+९०) \times (३०+१) \times ३०}{६} = २३४०५$
गोळे.

तिसरी टीप.

एक उपयोगी रीति रूग्म आहे. जिनें तीन प्रकारच्या
दुःखा राशि म्हणजे त्रिकोणराशि, चौरसराशि, आणि काटकोनचौ
कोनराशि, त्यांतील गोळ्यांची संख्या निघते. म्हणून आरंभीं
तिसरे आकृतीचर लक्ष्य ठेवून कर, तेव्हां,

(बड+अ+क) $\times \frac{३}{२}$ बडक = त्रिकोणराशांतील गोळ्यांची
संख्या.

(ईफ+ईफ+ग) $\times \frac{३}{२}$ गफह = चौरस राशां
तील गोळ्यांची संख्या.

(बफ+बफ+अई) $\times \frac{३}{२}$ अबक = काटकोनचौको
नराशांतील गोळ्यांची संख्या.

यांतून एक सामान्य रीति निघते. पायाचे वाभूचे एके
ओळींत जी गोळ्यांची संख्या आहे ती, आणि तिशीं समांतर
दुसरे कडील वाजूचे ओळींतील संख्या, (ती एक किंवा अनेक
भ्रमनाल) आणि पायाशीं समांतर राशि शिरओळींतील संख्या,
अशा त्या तीन संख्या एकत्र मिळवून ती बेरीज राशीचे तिर्कस

वा जूनील गोळ्यांचे संख्येचे एक तृतीयांशानें गुणाची, तो गुणा कार राशीतील इच्छिली संख्या होईल.

भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी.

भूमितिप्रमाण म्हणजे एक पद दुसरे पदाचा काय भाग आहे. अथवा काय गुणक आहे : अथवा एक पद दुसरे पदांत कितीपेक्षा जातें, असा विचार करितां पदसंबंधि आहे. - परस्पर निळविले दोन पदांतील प्रथमपदास अग्रसर म्हणतात, आणि दुसरे पदास उपाग्रसर. त्याचें गुणान्तर म्हणजे भागाकार आहे, जें एक दुसऱ्यानें भागून उसन्न होतो.

चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत, जेव्हां दोन युक्तें गुणान्तर बराबर आहे, अथवा जेव्हां प्रथमपद दुसरे पदाचा भाजक किंवा गुणक आहे, तसाच तिसरें चौथ्याचा. जसें, ३, ६, ४, ८ आणि अ, अर, ब, बर, हीं भूमितिप्रमाणांत आहेत.

कारण $\frac{३}{६} = \frac{४}{८} = २$ आणि $\frac{अर}{अ} = \frac{बर}{ब} = २$, आणि त्यांस त्या रीतीनें लिहितात. जसें, ३ : ६ :: ४ : ८, इत्यादि अंकगणितामध्ये पहा.

भूमितिश्रेढी तीच होय . जींतील सर्व पदांचे गुणोत्तर अ
नुक्रमानें एकच आहे . जसें, १, २, ४, ८, १६, इत्यादि
ज्यांत गुणोत्तर २ आहे .

भूमितिश्रेढीचा साधारण गुण हाच आहे कीं, कोणतेही
दोन पदांचा गुणाकार, अथवा कोणतेही एक पदाचा वर्ग, प्र
त्येक दोन पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे . जीं दोन पदे त्यांपा
सून बराबर अंतरानें दोहोकडून घेतलीं आहेत . म्हणजे ज
सें त्या पदांतील १, २, ४, ८, १६, ३२, ६४ इत्यादि $१ \times ६४ =$
 $२ \times ३२ = ४ \times १६ = ८ \times ८ = ६४$

कोणतेही भूमितिश्रेढीतील जर

अ, अति लहान पद दारववितो .

इ, अति मोठें पद _____

र, गुणोत्तर _____

न, गल्ल _____

स, सर्वधन _____

जेव्हां त्या पदांतील कोणतेही एक पदाची किंमत दु
सरे पदांचे किमतीपासून निघेल . त्या पुढील सामान्यसमी
करणावरून .

$$१, र = \left(\frac{१}{२} \right)$$

$$२, \text{ज्ञ} = \text{अ} \times \text{र}^{n-1}$$

$$३, \text{अ} = \frac{\text{ज्ञ}}{\text{र}^{n-1}}$$

$$४, \text{न} = \frac{\text{ला} \cdot \text{अ}^{\text{रज्ञ}}}{\text{ला} \cdot \text{र}} = \frac{\text{ला} \cdot \text{र} + \text{ला} \cdot \text{ज्ञ} - \text{ला} \cdot \text{अ}}{\text{ला} \cdot \text{र}}$$

$$५, \text{स} = \frac{\text{र}^{n-1}}{\text{र}-१} \times \text{अ} = \frac{\text{र}^{n-1}}{\text{र}-१} \times \frac{\text{ज्ञ}}{\text{र}^{n-1}} = \frac{\text{रज्ञ} - \text{अ}}{\text{र}-१}$$

जेव्हां श्रेणी अनंत आहे, तेव्हां अतिलाहान पद अशु-
न्य आहे, आणि सर्वघन $\text{स} = \frac{\text{रज्ञ}}{\text{र}-१}$ होतें.

कोणतेही चढते भूमितिश्रेणीमध्ये अथवा कोणतेही श्रे-
ढीमध्ये ज्याचा आरंभ १ पासून होतो, तर तिसरें, पांचवें, सात-
तवें, इत्यादि पदे वर्ग होतील. चौथें, सातवें, दहावें, इत्यादि
पदे घन होतील; आणि सातवें वर्ग आणि घन ही होईल. ज-
सें त्या श्रेणींत १ र, र^२, र^३, र^४, र^५, र^६, र^७, र^८, इत्यादि. र^२
र^३, र^४, र^५ हे वर्ग आहेत; र^३ र^४ र^५ हे घन आहेत; आणि
र^७ हा वर्ग आणि घनही आहे.

उत्तरतीश्रेढीमध्ये गुणोत्तर र अपूर्ण आहे, आणि ते-
व्हां $\text{स} = \frac{१-\text{र}^n}{१-\text{र}}$ अ.

जर न अनंत असेल, तर $\text{स} = \frac{\text{अ}}{१-\text{र}}$ खांत अ प्रथ-
मपद दाखवितो.

जेव्हां चार पदे प्रमाणांत आहेत. जसें, अ, अर,

ब, वर, अथवा २, ६, ४, १२, तैक्यां त्या पदांची पु-
टील कोणती ही रूपे परस्पर प्रमाणांत होतील.

- १ समगतीनें अःअरः :: वः वर, अथवा २ : ६ :: ४ : १२
- २ व्यस्त — अरः अः :: वरः व, — ६ : २ :: १२ : ४
- ३ परावर्त — अः वः :: अरः वर, — २ : ४ :: ६ : १२
- ४ संयुक्त — अः अ + अरः :: वः व + वर, २ : ८ :: ४ : १६
- ५ वियुक्त — अः अ - अः :: वः व - वर, २ : ४ :: ४ : ८
- ६ मिश्र — अर + अः अ - अः :: वर + वः व - वर, ४ : १६ :: १२ : ४८
- ७ गुणाकार — अकः अरकः :: वः वर — २ × ३ : ६ × ३ :: ४ : १२
- ८ भागाकार — $\frac{अ}{क} : \frac{अर}{क} :: वः वर$ — १ : ३ :: ४ : १२
- ९ अ, व, क, ड, हीं चार पदे समस्वर प्रमाणांत आहेत. जे
व्यां अः उः :: अ व बः क ग ड. अथवा जेव्हां तीं व्युत्क्रम पदे,
अ, व, क, ड गणितप्रमाणांत आहेत.

उदाहरणे.

पहिलें, एक भूमिनिश्रेढीचें प्रथम पद १ आहे, गुणोत्त
र २ आणि गच्छ १२, हिचें सर्वधन काय होईल ?

आतां $१ \times २^१ = १ \times २ = २$ हें अतिमोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{२ \times १२ \times २ - १}{२ - १} = \frac{४८ - १}{१} = ४७$ हें इतिलें सर्वधन.

दुसरें, एक भूमितिश्रेढीचें प्रथम पद $\frac{1}{3}$ आहे. गुणा-
तर $\frac{1}{3}$, आणि गळ ८, तिचें सर्वधन काय होईल?

आता $\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3})^8 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6561} = \frac{1}{19683}$ हें अतिमोठें पद.

तेका $(\frac{1}{3} - \frac{1}{19683} \times \frac{1}{3}) \div (1 - \frac{1}{3}) = (\frac{1}{3} - \frac{1}{59049}) \div \frac{2}{3} =$
 $\frac{393}{59049} \times \frac{3}{2} = \frac{393}{39378}$ हें इच्छितें सर्वधन.

तिसरें, १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि गळ
२०, त्याचें सर्वधन काय?

उत्तर, १०४८५७५

चवथें, १, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, इत्यादि गळ ८,
त्याचें सर्वधन काय?

उत्तर, १ $\frac{327}{32}$

पांचवें, १, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, इत्यादि गळ १०, त्याचें
सर्वधन काय?

उत्तर, १ $\frac{२६४१}{११६६३}$

साहाचें, १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि ग-
ळ १०० त्याचें सर्वधन काय?

उत्तर, १२६७६५०६००२२८२२९४०१४९६७०३२०५३७५

सातवें, कोणा एका मनुष्याजवळ बहुत चांगला एक
घोडा होता, तो कोणी हौशी मनुष्यानें पाहून विकत मागि-

तला, तेव्हां त्यानें आपली प्रतिज्ञा सांगितली कीं, त्याचे चार नाल मिळून चुका २२ आहेत, त्यास प्रथम चुकेस रेस ५ पुढें एकेक चुकेस त्याचे त्याचे दुपटीनें वाढते, त्याचे रुपये जे होतील ते जो देईल त्यास घोडा मिळिल म्हणून, त्या प्रमाणें त्या हौशीस तो घोडा घेणें तर किती रुपये द्यावे लागतील ?

रु० पा० रे०
उत्तर, ५३६८७०९१ : ० : ७५

अनंतश्रेणी.

ही अनंतश्रेणी, ज्यांत संयुक्तपद भाजक आहे, अशा भागाकारापासून आणि संयुक्त करणीपदाचें मूळ काढिल्या पासून उत्पन्न होते. अथवा दुसरे कांहीं सामान्यरीतीनें. आणि कितीही वाढविली तरी अंत पावत नाही. जसे अपूर्णांक गणितांत दशांश*.

* या अनंतश्रेणीची रीति डॉक्टर वॉलिससाहेब यांनी प्रथम कामांत आणिली. आणि संन १८९० इसवीमध्ये त्यांनी गणितपुस्तकें छापिलीं. त्यांत $\frac{अ}{१-र}$ हें अपूर्णांकीज चालते भागाकाराचें भागतां भांगतां ही अनंतश्रेणीरीति उत्पन्न केली. अ+अर+अर^२+अर^३+अर^४+ इत्यादि.

परंतु किती एक पदे प्रथम उत्पन्न करून, श्रेणीचा मार्ग प्रकट होईल, आणि तपशिलाचा श्रम केल्यावांचून अशा रीतीने श्रेणी पुढे चालविता येईल.

प्रथमकृत्य.

अपूर्णपदांस भागाकारांनी अनंतश्रेणीचे रूप द्यावयाचे.

रीति.

भागाकाररीतीने अंश छेदांनी भागाचे; आणि हें भागाकारकृत्य इला आहेपर्यंत वाढवावे, म्हणजे इच्छिली अनंत श्रेणी उत्पन्न होईल.

उदाहरण

पहिले, $\frac{2अब}{अ+ब}$ त्यास अनंतश्रेणीचे रूप दे.

$$\begin{aligned} (अ+ब) २अब & (२ब - \frac{२ब^२}{अ} + \frac{२ब^३}{अ^२} - \frac{२ब^४}{अ^३} + \text{इत्यादि.}) \\ \frac{२अब+२ब^२}{-२ब^२} & - \frac{२ब^३}{अ} \\ & + \frac{२ब^४}{अ^२} \\ & + \frac{२ब^५}{अ^३} + \frac{२ब^६}{अ^४} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 -\frac{2b^2}{a^2} \\
 -\frac{2b^2}{a^2} - \frac{2b^2}{a^2} \\
 \hline
 +\frac{2b^2}{a^2} \text{ इत्यादि}
 \end{array}$$

दूसरें, $\frac{1-a}{1+a}$ त्यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

१-अ) १ (१+अ+अ^२+अ^३+अ^४+ इत्यादि

$$\begin{array}{r}
 \frac{1-a}{1+a} \\
 + a \\
 + a - a^2 \\
 + a^2 \\
 + a^2 - a^3 \\
 \hline
 + a^3 \\
 + a^3 - a^4 \\
 \hline
 + a^4 \text{ इत्यादि}
 \end{array}$$

तिसरें, $\frac{b}{a+k}$ त्यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{b}{a} \times (1 - \frac{k}{a} + \frac{k^2}{a^2} - \frac{k^3}{a^3} + \text{इत्यादि})$

चौथें, $\frac{a}{a-b}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{व}{अ} + \frac{व^२}{अ^२} + \frac{व^३}{अ^३} +$ इत्यादि.

पांचवें, $\frac{१-क्ष}{१+क्ष}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव .

उत्तर, $१ - २क्ष + २क्ष^२ - २क्ष^३ + २क्ष^४ -$ इत्यादि.

साहाबें, $\frac{अ^३}{(अ+व)^३}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ - \frac{२व}{अ} + \frac{३व^२}{अ^२} - \frac{४व^३}{अ^३} +$ इत्यादि

सातवें, $\frac{१^२}{१+१} = \frac{१}{२}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव .

दुसरेंकृत्य .

संयुक्तकरणीपदास अनंतश्रेणीचें रूप धावयाचें .

रीति .

गणितरीतीनें त्याचें मूळ काढावें, आणि हें मूळकृत्य इच्छा आहेपर्यंत वाढवावें, म्हणजे इच्छिली अनंतश्रेणी उसल होईल; परंतु ही रीति वर्गमूळ काढायास उपयोगी आहे . त्याहून मोठे घाताचें मूळ काढायास बहुल श्रम पडतो .

उदाहरणें .

पहिलें, $अ-क्ष$ त्याचें अनंतश्रेणींत मूळ काढ .

$$\begin{aligned}
 & \text{अ-क्ष} \left(\text{अ} - \frac{\text{क्ष}}{२\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^२}{४\text{अ}^३} - \frac{\text{क्ष}^३}{८\text{अ}^४} - \frac{५\text{क्ष}^४}{३२\text{अ}^५} \right) \text{ इत्यादि.} \\
 & २\text{अ} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} \left(\frac{\text{अ}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^२}{४\text{अ}^२} \right) - \frac{\text{क्ष}^३}{८\text{अ}^४} \\
 & २\text{अ} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} \left(\frac{\text{अ}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^२}{४\text{अ}^२} \right) - \frac{\text{क्ष}^३}{८\text{अ}^४} \\
 & २\text{अ} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} \left(\frac{\text{अ}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^२}{४\text{अ}^२} \right) - \frac{\text{क्ष}^३}{८\text{अ}^४} - \frac{\text{क्ष}^४}{१६\text{अ}^५} \\
 & २\text{अ} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} \left(\frac{\text{अ}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^२}{४\text{अ}^२} \right) - \frac{\text{क्ष}^३}{८\text{अ}^४} - \frac{\text{क्ष}^४}{१६\text{अ}^५} \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{\text{क्ष}^५}{३२\text{अ}^६} + \frac{\text{क्ष}^६}{६४\text{अ}^७} + \frac{\text{क्ष}^७}{२५६\text{अ}^८} \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{५\text{क्ष}^८}{६४\text{अ}^९} \text{ इत्यादि.}
 \end{aligned}$$

दुसरें, $\sqrt{१+१} = \sqrt{२}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{१}{२} - \frac{१}{४} + \frac{१}{८} - \frac{१}{१६}$ इत्यादि

तिसरें, $\sqrt{१-१}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ - \frac{१}{२} - \frac{१}{४} - \frac{१}{८} - \frac{१}{१६}$ इत्यादि

चौथें, $\sqrt{\text{अ}^२ + \text{क्ष}}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

पांचवें, $\sqrt{\text{अ}^२ - २\text{बक्ष} - \text{क्ष}^२}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

तिसरें कृत्य.

कोणतेही द्वियुक्तदाचें मूळ काढायचें, अथवा द्वियु-

व्यदकरणीस अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

हें कृत्य पुढील सारणीकोष्टकापासून होतें, असें कीं, त्यांतील अक्षरांचे स्थानीं द्वियुक्त्यांचीं अक्षरें ठेविल्यानें म्हणजे,

$$(प+पक)^{\frac{म}{न}} = प^{\frac{म}{न}} अक + \frac{म-न}{२न} बक + \frac{म-२न}{३न} कक + \text{इत्यादि.}$$

प, प्रथम पद दाखवितो.

क, दुसरें पद प्रथमानें भागिलें तें दाखवितो.

$\frac{म}{न}$, घातकिंवा मूळ त्यांचा प्रकाशक दाखवितो.

अ, ब, क, उ, इत्यादि अक्षरें त्यांचे त्यांचे पूर्वीं नीं पदे दाखवितो.

उदाहरणें .

पहिलें, अ^१+ब^२ त्यांचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ

एथें. प = अ^१, क = $\frac{ब^२}{अ}$, $\frac{म}{न} = \frac{१}{२}$; त्याजकरितां
 $प^{\frac{म}{न}} = (अ^१)^{\frac{१}{२}} = अ = अ$ हें श्रेणीचें प्रथम पद.

$\frac{म}{न}$ अक = $\frac{१}{२} \times अ \times \frac{ब^२}{अ} = \frac{ब^२}{२अ} = ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद.

$\frac{म-न}{२न}$ बक = $\frac{१-२}{४} \times \frac{ब^२}{अ} \times \frac{ब^२}{अ} = -\frac{ब^४}{४अ^३} = क$ हें श्रेणीचें तिसरें पद.

$\frac{म-अ}{अ} क क = \frac{१-४}{६} \times -\frac{ब}{२४अ} \times \frac{ब}{अ} = \frac{२ब}{२४६अ} = ७$ हे श्रेणीचे चौथे पद आहे.

त्याजकरिता $अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब}{२४अ} + \frac{३ब}{२४६अ}$ - इत्या

अथवा, $अ + \frac{ब}{२अ} - \frac{ब}{२४अ} + \frac{३ब}{२४६अ} - \frac{४ब}{२४६अ} +$ इत्यादि इच्छि ली श्रेणी, हे उत्तर.

दुसरे, $\frac{१}{(अ-क्ष)}$ अथवा त्याचे बरोबर किमतीचे $(अ-क्ष)^{-१}$ त्याची अनंतश्रेणीत किमत काढ.

एथे $प=अ$, $क = -\frac{क्ष}{अ}$, $\frac{म}{न} = \frac{-१}{१} = -२$; त्याज करिता $प^१ = अ^१ = अ$, हे श्रेणीचे प्रथम पद.

$\frac{म}{न} अक = -२ \times \frac{ब}{अ} \times -\frac{क्ष}{अ} = \frac{२क्षब}{अ^२} = २अ^३क्ष = ७$ हे श्रेणीचे दुसरे पद.

* ही रीति अपूर्णबीजावर लावायास पुढे सांगतो, त्या प्रकारे सगळ्या प्रकारे, तो प्रकार, आधी हे समजायास योग्य की, कोणतीही करणी छेद म्बळांतून अंशस्वरुपी आणणे अथवा अंशस्वरुपांतून छेदस्वरुपी नेणे हे तिनंचे प्रकाराकडिन्ह बदल करून दाय्य आहे. जसे, $क्ष^२ = १ \times क्ष^२$ अथवा $क्ष^२$, इतके मात्र; आणि $(अ+ब)^२ = १ \times (अ+ब)^२$ अथवा $(अ+ब)^२$ इतके मात्र; आणि $\frac{अ}{(अ+क्ष)} = अ^१ (अ+क्ष)^{-१}$; आणि $\frac{क्ष^२}{क्ष^२} = क्ष^२ \times क्ष^{-२}$; आणि $\frac{(अ+क्ष)^२}{(अ-क्ष)^२} = (अ+क्ष)^२ \times (अ-क्ष)^{-२}$ इत्यादि.

$\frac{म-न}{२न}$ बक $= -\frac{३}{२} \times \frac{३क्ष}{अ३} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{३क्ष^२}{अ२} = ३ अक्ष = क$
 हे श्रेणीचे तिसरे पद.

$\frac{म-२न}{३न}$ कक $= -\frac{४}{३} \times \frac{३क्ष}{अ} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{४क्ष^२}{अ२} = ४ अक्ष = उ$
 हे श्रेणीचे चौथे पद.

तेकां $अ^२ + २ अक्ष + ३ अक्ष^२ + ४ अक्ष^३ +$ इत्यादि.

अथवा, $\frac{१}{अ} + \frac{३क्ष}{अ^२} + \frac{३क्ष^२}{अ^३} + \frac{४क्ष^३}{अ^४} + \frac{५क्ष^४}{अ^५}$ इत्यादि इच्छिली श्रेणी हे उत्तर.

तिसरे, $\frac{अ^३}{अ-क्ष}$ त्याची किंमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ + क्ष + \frac{क्ष^२}{अ} + \frac{क्ष^३}{अ^२} + \frac{क्ष^४}{अ^३} + \frac{क्ष^५}{अ^४}$ इत्यादि.

चौथे, $\frac{१}{\sqrt{अ-५क्ष}}$ अथवा $\frac{१}{(अ-५क्ष)^{१/२}}$ त्याची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $\frac{१}{अ} - \frac{५क्ष}{२अ^२} + \frac{३५क्ष^२}{८अ^३} - \frac{५५क्ष^३}{६४अ^४}$ इत्यादि.

पांचवे, $\frac{अ^२}{(अ-ब)^२}$ त्यांस अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{२ब}{अ} + \frac{३ब^२}{अ^२} + \frac{४ब^३}{अ^३} + \frac{५ब^४}{अ^४} +$ इत्यादि.

साहावे, $\sqrt{अ-क्ष}$ अथवा $(अ-क्ष)^{१/२}$ त्यांस अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $अ - \frac{क्ष}{२अ} - \frac{क्ष^२}{८अ^२} - \frac{क्ष^३}{६४अ^३} - \frac{५क्ष^४}{१२८अ^४}$ इत्यादि

सातवें, ३(अ-बे) अथवा (अ-बे)^३ त्याची किंमत अनंतश्रेणींत काढ.

$$\text{उत्तर, } \frac{ब^३}{३अ^३} - \frac{ब^६}{६अ^६} + \frac{ब^९}{९अ^९} - \dots \text{ इत्यादि}$$

आठवें, ५(अ+बे) अथवा (अ+बे)^५ त्याची किंमत अनंतश्रेणींत काढ.

$$\text{उत्तर, } \frac{अ^५}{५अ^५} + \frac{५अ^३बे^२}{२५अ^५} + \frac{६अ^२बे^३}{१२५अ^५} + \dots \text{ इत्यादि.}$$

नववें, $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ त्याचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

$$\text{उत्तर, } १ - \frac{अ}{२अ} + \frac{ब^२}{४अ^२} - \frac{ब^३}{४अ^३} \text{ इत्यादि.}$$

दाहावें, $\frac{अ}{अ+ब}$ त्याचें घनमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

$$\text{उत्तर, } १ - \frac{ब^३}{३अ^३} + \frac{३ब^६}{९अ^६} - \frac{१४ब^९}{२७अ^९} \text{ इत्यादि.}$$

अनंतश्रेणी दुसरा भाग.

प्रथम कृत्य*.

सांगितले श्रेणीचे पदांचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा करायाचें.

* एकवर्णसमीकरण आणि वर्गसमीकरण हीं शिकल्यानंतर हें शिकविणें हें वें आहे

रीति .

१ प्रथमपद दुसऱ्यांतून वजा करावें, तसें दुसरें तिसऱ्यांतून, तिसरें चौथ्यांतून, त्याप्रमाणें पुढें ही; त्या बाक्यांपासून एक नवी श्रेणी उत्पन्न होईल, जीस बाक्यांनी प्रथम परंपरा म्हणतात.

२ त्या नवे श्रेणीतील प्रथम पद दुसऱ्यांतून वजा करावें, दुसरें तिसऱ्यांतून, त्याप्रमाणें पूर्ववत् करावें; म्हणजे त्या बाक्यांपासून एक दुसरी श्रेणी उत्पन्न होईल, तीस बाक्यांची दुसरी परंपरा म्हणतात.

३ त्याप्रमाणें पुढें तिसरी चौथी पांचवी इत्यादि बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढाव्या, बाकी ० होईपर्यंत, अथवा प्रयोजन आहेपर्यंत.

उदाहरणें .

पहिलें, १, ४, ८, १३, १९, २६ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

आतां १, ४, ८, १३, १९, २६ इत्यादि सांगितली श्रेणी

तेव्हां ३, ४, ५, ६, ७, इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १, १, १, १, इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ० , ० , ० इत्यादि तिसरी परंपरा.
म्हणजे स्पष्ट आहे की, त्याजवर काम स्तब्ध झाले.

दुसरें, १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्या
दि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

आनां १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि सांगितली श्रे.

तेव्हां ३ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १ , ४ , ८ , १६ , ३२ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ३ , ४ , ८ , १६ इत्यादि तिसरी परंपरा.

आणि १ , ४ , ८ इत्यादि चौथी परंपरा.

आणि ३ , ४ , इत्यादि पांचवी परंपरा.

आणि १ इत्यादि साहावी परंपरा.

तिसरें, १ , २ , ३ , ४ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यां-
च्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर { प्रथम परंपरा १, १, १, १ इत्यादि.
दुसरी परंपरा ०, ०, ० इत्यादि.

चौथें, १ , ४ , ९ , १६ , २५ इत्यादि त्या वर्गापा
सून झाले श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर { प्रथम परंपरा ३, ५, ७, ९ इत्यादि.
दुसरी परंपरा २, २, २ इत्यादि.
तिसरी परंपरा ०, ०, ० इत्यादि.

पांचवे, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि त्या घनांपासून झाले श्रेणीचे बजावाक्यांच्या परंपरा काढ.

साहावे, १, ६, २०, ५०, १०५ इत्यादि त्या श्रेणीचे बजावाक्यांच्या परंपरा काढ.

दुसरे कृत्य.

सांगितले श्रेणीचे कोणतेही पद काढायचे.

रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई इत्यादि सांगितली श्रेणी असावी, आणि उ, ङ, च, छ इत्यादि, हीं अक्षरचिन्हे पूर्वरीताप्रमाणे काढिले बाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदे अनुक्रमे दाखवायास असावीं. आणि न अक्षरचिन्ह इच्छिले पदाचे स्फळ दाखवायास असावे.

२ तेव्हां $अ + \frac{न-१}{१} \cdot उ + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot च + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot \frac{न-३}{३} \cdot छ + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot \frac{न-३}{३} \cdot \frac{न-४}{४} \cdot ज +$ इत्यादि = न इच्छिलें पद.

उदाहरणे.

पहिलें, २, ५, ९, १४, २० इत्यादि त्या श्रेणीचें
दाहावें पद काढ.

आतां २, ५, ९, १४, २० इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां ३, ४, ५, ६ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १, १, १ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

त्यांत $ड = ३$, $ड' = १$, $ड'' = ०$ आणि $अ = २$, $न = १०$
त्याजकरितां $अ + \frac{न-१}{१} \cdot ड + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-२}{२} \cdot ड' = २ + \frac{१०-१}{१} \cdot ३$
 $+ \frac{१०-१}{१} \cdot \frac{१०-२}{२} \times १ = २ + २७ + ३६ = ६५$ इच्छिलें दाहावें पद हें
उत्तर.

दुसरें, २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि त्या श्रेणीचें
विसावें पद काढ.

आतां २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां ४, ६, ८, १० इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि २, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

त्यांत $ड = ४$, $ड' = २$, आणि $अ = २$, $न = २०$ त्याजक-
रितां, $अ + \frac{न-१}{१} \cdot ड + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-१}{२} \cdot ड' = २ + \frac{१९}{१} \cdot ४ + \frac{१९}{१} \cdot \frac{१९}{२} \cdot २$
 $= २ + ७६ + ३४२ = ४२०$ इच्छिलें विसावें पद आहे हें उत्तर.

तिसरें १, ३, ६, १० इत्यादि, त्या श्रेणीचें पांचवें पद काय आहे?

उत्तर, १५

चौथें, १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि, त्या श्रेणीचें साहवें पद काय आहे?

उत्तर ६४

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि, त्या श्रेणीचें विसावें पद काढ.

उत्तर ८०००

तिसरें कृत्य.

जर सांगितले श्रेणीचीं पदें एकमेवे अंतरांनं असतील तर मध्यस्थापना पासून कोणतेंही आंतलें पद काढायचें.

रीति.

१ स्थापन करायाचें पद दाखवायाकरितां य अक्षर घ्यावें, श्रेणीचे आरंभापासून त्या पदापर्यंत अंतर दाखवायास क्ष घ्यावें, आणि उं डं डूं डूं हीं वाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदें दाखवायास असावीं.

२ तेव्हां अ + क्षड + क्ष • $\frac{क्ष-१}{२}$ • उं + क्ष • $\frac{क्ष-१}{२}$ • $\frac{क्ष-२}{२}$

$\text{ड} + \text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}-१}{२} \cdot \frac{\text{क्ष}-२}{३} \cdot \frac{\text{क्ष}-३}{४} \cdot \text{ड} +$ इत्यादि = य इच्छिले पद होईल .

उदाहरणें.

पहिलें, ३, ४, ३, ५, ३, ६, ३, ७ आणि ३, ४ त्यांची लागरतंम भुजज्या सांगितली आहे, त्यापासून ३, ६, १५ त्यांची लागरतंम भुजज्या काढ .

| श्रेणी | लागरतंम | प्रथमपरंपरा | दुसऱ्या | तिसऱ्या |
|--------|---------|-------------|---------|---------|
| ३, ४ | ८ | ७२८३३६६ | | |
| ३, ५ | ८ | ७३०६८८२ | २३५१६ | |
| ३, ६ | ८ | ७३३०२७२ | २३३९४ | १२६ |
| ३, ७ | ८ | ७३५३५३५ | २३२६३ | १२७ |
| ३, ८ | ८ | ७३७६६७५ | २३१४० | १२८ |

एथें $\text{क्ष} = (३, ६, १५ - ३, ४ = २, १५) = \frac{१५}{२} = \text{य}$ पदाचे स्थापनावें अंतर, $\text{अ} = ८$, $\text{ड} = २३५१६$,

$\text{ड} = -१२६$, आणि $\text{ड} = १$, आणि $\text{य} = \text{अ} + \text{क्षड} + \text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}-१}{२}$

$\cdot \text{ड} + \text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}-१}{२} \cdot \frac{\text{क्ष}-२}{३} \cdot \text{ड} = (\text{अ} + \frac{१५}{२} \text{ड} + \frac{१५}{२} \text{ड} + \frac{१५}{२} \text{ड}) =$

$८ \cdot ७३८३३६६ + ० \cdot ० \cdot ५२९११ - ० \cdot ० \cdot ० \cdot १७७१८७५ + ० \cdot ०$

$० \cdot ० \cdot ० \cdot ११७ = ८ \cdot ७३३६०९१९२९६$ इच्छिली लागरतंम-

भुजज्या आहे .

दुसरे, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ ही सांगितली श्रेणी आहे, $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{3}$ त्या दोन पदांचे मधील पद काढ .

उत्तर, $\frac{1}{6}$

तिसरे, 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ आणि 1 , $\frac{1}{2}$ त्यांची लागरतंमभुजज्या सांगितली आहे, आणि 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ त्यांची लागरतंमभुजज्या इलिली आहे .

उत्तर, $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

चौथे कृत्य .

मध्यस्थापनाने कोणतेही मधील पद काढायचे, जे कां बरोबर अंतराचे श्रेणीच्या प्रथम बाक्या लघु आहेत.

रीति .

१ अ, ब, क, ड, ई, फ इत्यादि अक्षरनिहे सांगितली श्रेणी दाखवायाम घ्यावी, आणि $n =$ सांगितले पदाची संख्या .

२ तेव्हा $a - n + 1$, $b - n + 2$, $c - n + 3$, $d - n + 4$, $e - n + 5$, $f - n + 6$ इत्यादि $= 0$ त्यापासून स्थळांतर आणि पृथक्करण करून कोणतेही पद उत्पन्न होईल .

उदाहरणं.

पहिलें, १०, ११, १२, १३, आणि १५ त्यांची वर्गमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इच्छिलें आहे कीं, चौदाचें वर्गमूळ काढावें.

एथें $n=५$ आणि $ई =$ इच्छिलें पद

$$अ = \sqrt{१०} = ३\ १६\ २२\ ७\ ७\ ६$$

$$ब = \sqrt{११} = ३\ ३१\ ६६\ २४\ ८$$

$$क = \sqrt{१२} = ३\ ४६\ ४१\ ०\ १६$$

$$ड = \sqrt{१३} = ३\ ६०\ ५५\ ५\ १२$$

$$फ = \sqrt{१५} = ३\ ८७\ २९\ ८\ ३३$$

आणि त्यास्तव $n=५$, आतां श्रेणी ६ पदें पावेतां वाढविली पाहिजे, त्याजकरितां $अ-nब+n\frac{n-१}{२}$. $क-n\frac{n-१}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $ड+n\frac{n-१}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $ई-n\frac{n-१}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $\frac{n-४}{५}$. $फ=०$ नंतर ईची किंमत काढायाकरितां स्त्रुकांतरानें हें उसन्न होतें. $n\frac{n-१}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $ई = -अ+nब-n\frac{n-१}{२}$. $क+n\frac{n-१}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $ड+n\frac{n-१}{२}$. $\frac{n-३}{२}$. $\frac{n-४}{५}$. $फ$. त्या समीकरणास संख्येंत हें रूप होतें. $५ई = -३\ १६\ २२\ ७\ ७\ ६ + (५ \times ३\ ३१\ ६६\ २४\ ८) - (१० \times ३\ ४६\ ४१\ ०\ १६) + (१० \times ३\ ६०\ ५५\ ५\ १२) +$

३८७२९८७३ = ५५५५११६१९३ - ३७८०३२९३६ = १८७०८७२५७
 आणि इ = $\frac{१८७०८७२५७}{५} = ३७४१६६५१४$ इच्छिलें मूळ जव
 कं जवळ, हें उत्तर.

दुसरें, ३७, ३८, ३९, ४१, आणि ४२ त्यांचीं वर्ग-
 मूळें सांगितलीं आहेत, आणि इच्छिलें आहेकीं, चाळिसांचें
 वर्गमूळ काढावें.

उत्तर, ६३२४५५५३२

तिसरें, ४९, ४६, ४७, ४८, आणि ४९ त्यांचीं घ-
 नमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इच्छिलें आहेकीं, ५० चें घन
 मूळ काढावें.

उत्तर, ३६८४०३३

पांचवें कृत्य.

सांगितले श्रेणीस फिरवायाचें.

जेव्हां कोणते एक श्रेणीचे पदांमध्ये अव्यक्त पदाचे
 घात आहेत. त्या अव्यक्त पदाचे किमतीचा शोध, दुसरे श्रे-
 णीतील पदांपासून होतो. ज्या श्रेणीत सांगितले श्रेणीपदां
 चे बरोबरीचे घात आणि व्यक्त पदें तींच असावीं.

रीति.

१ अव्यक्त पदानि किंमत दारववायाकरितां एक श्रेणी ये. अशीकीं, निचें रूप फिरवायाने सांगितले श्रेणीचे रूपाचें होईल.

२ ही श्रेणी आणि इचे घात सांगितले श्रेणीचीं अव्यक्त पदं आणि घात त्यांचे स्वरूपां ठेवावीं.

३ उत्पन्न झालेलीं तीं पदं सांगितले श्रेणीतील त्याच्या प्रतियोगी पदांचे बरोबर करावीं, म्हणजे घेतले वेळाप्रकाशकाची किंमत उत्पन्न होते.

उदाहरणे

पहिलें, अक्ष + वक्ष + कक्ष + उक्ष + इत्यादि = क्ष, ही सांगितली श्रेणी असावी. त्यांतील क्षची किंमत क्षपदांत आणि व्यक्त पदांत काढावी.

भातां क्ष^१ = क्ष ये, तेव्हां स्पष्ट आहे कीं, जर क्ष^१ आणि त्याचे ही घात सांगितले श्रेणीमध्ये क्ष आणि त्याचे घात त्यांचे स्वरूपां ठेविले तर इचे घातप्रकाशक हे होतील. न, २न, ३न, ४न, इत्यादि, आणि १, त्यांकरितां न=१ आणि त्या घातप्रकाशकांच्या वजावाक्या त्या आहेत. ०, १, २, ३, ४, इत्यादि. म्हणजे त्या कारणास्तव घ्यावयाचे श्रेणी

ने घातप्रकाशकांच्या ही वजावाक्या अशाच असाव्या; म्हणून घेतली श्रेणी हीच असावी, अज्ञ+वज्ञ+कज्ञ+उज्ञ+इत्यादि=क्ष, आणि जर ही श्रेणी वर्गादिकें करून वाढविली आणि क्षचे वेगळाले वर्गादिघातस्थळी ठेविली, तर सांगितले श्रेणीस हें रूप होईल.

$$\left. \begin{array}{l} \text{अअज्ञ+अवज्ञ+अकज्ञ+अउज्ञ+इत्यादि.} \\ * \quad + \text{बअज्ञ+२बअवज्ञ+२बअकज्ञ+इत्या.} \\ * \quad * \quad * \quad + \text{बवज्ञ+इत्यादि.} \\ * \quad * \quad + \text{कअज्ञ+३कअवज्ञ+इत्यादि.} \\ * \quad * \quad * \quad + \text{उअज्ञ+इत्यादि.} \end{array} \right\} = \text{क्ष}$$

आतां त्यांत तीं पदे ज्यांन ज्ञचे सारखे घात आहेत त्यांस सम करून ही उत्पन्न होतात.

$$(\text{अअज्ञ}=\text{ज्ञ}) \text{ अथवा } \text{अ} = \frac{\text{ज्ञ}}{\text{अ}}$$

$$(\text{अवज्ञ}+\text{बअज्ञ}=\text{०}) \text{ अथवा } \text{ब} = \left(-\frac{\text{वअ}}{\text{अ}} \right) = -\frac{\text{व}}{\text{अ}}$$

$$(\text{अकज्ञ}+\text{२बअवज्ञ}+\text{कअज्ञ}=\text{०}) \text{ अथवा } \text{क} = \left(-\frac{\text{२बअव}+\text{कअ}}{\text{अ}} \right) = \frac{\text{२ब}^2-\text{अक}}{\text{अ}}$$

$$\text{उ} = \left(-\frac{\text{२बअक}+\text{वव}^2+\text{३कअव}+\text{उअ}}{\text{अ}} \right) = \frac{\text{२बवक}-\text{२व}^2-\text{अउ}}{\text{अ}} \text{ इत्या.}$$

$$\text{आणि त्याजकरितां क्ष} = (\text{अज्ञ}+\text{वज्ञ}+\text{कज्ञ}+\text{इत्यादि}) = \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} -$$

$\frac{बज्ञ^३}{अ^३} + \frac{२ब^३-अक}{अ^३} . ज्ञ^३ - \frac{२ब^३-अबक+अउ}{अ^३} . ज्ञ^३ +$ इत्यादि, ही इ-
छिली श्रेणी झाली.

आणि ही उत्पन्न झालेली श्रेणी, ज्यांत सांगितले श्रेणीचे अव्यक्त पदांचे घातांसारिखे घात आहेत, त्यांसाठी साधारण सारणी कोष्टक आहे.

दुसरें, $क्ष - क्ष^३ + क्ष^३ - क्ष^३ +$ इत्यादि = $ज्ञ$, ही श्रेणी फिरवायास इच्छिली आहे.

एथें $अ=१$, $ब=-१$, $क=१$, $उ=-१$, इत्यादि. त्या किंमती पूर्वउदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = ज्ञ + ज्ञ^३ + ज्ञ^३ + ज्ञ^३ +$ इत्यादि हें इच्छिलें उत्तर.

तिसरें, $क्ष - क्ष^३ + क्ष^३ - क्ष^३ +$ इत्यादि, = $य$, ही श्रेणी फिरवायाची आहे.

एथें पूर्वप्रमाणें करून $अ=१$, $ब=-\frac{३}{२}$, $क=\frac{३}{२}$, $उ=-\frac{३}{२}$ त्या किंमती पूर्वउदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = य + \frac{य^३}{२} + \frac{य^३}{२} + \frac{य^३}{२} +$ इत्यादि.

साहायेंकृत्य

कोणतेही अनंतश्रेणीचे न पदापर्यंत संबंधन काढायाचे रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई इत्यादि अक्षरविन्हें सांगितली श्रेणी दाखवायास घे, स = न पदपर्यंत सर्वधन, आणि उं, डं, उं, डं इत्यादि विन्हें प्रथम कृत्याप्रमाणें बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा दाखवायास घे.

२ तेव्हां $nअ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ड + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot उ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot ड + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \cdot उ +$ इत्यादि = स, हें न पदपर्यंत श्रेणीचें इच्छिलें सर्वधन आहे.

प्रथम प्रकार १, २, ३, ४, ५ इत्यादि न पदपर्यंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, २, ३, ४, ५ इत्यादि सांगितली श्रेणी

१, १, १, १ इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथें $अ=१, ड=१, उ=०$, तेव्हां $nअ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ड =$
 $\frac{nअ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ड}{२} = \frac{(१n + \frac{n-1}{2} \cdot n)}{२} = \frac{n \cdot \frac{n+१}{२}}{२} = स$ इच्छिलें सर्वधन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें २० पदपर्यंत सर्वधन इच्छिलें आहे.

एथें $n=२०$, आणि $स = \frac{n \cdot \frac{n+१}{२}}{२} = \frac{२० \times २१}{४} = १०५$ सर्वधन, हें उत्तर.

प्रथमउदाहरण .

$१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} +$ इत्यादि पदें अनंत = स ही सांगितली श्रेणी, हिचें सर्वधन काट .

तर $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} +$ इत्यादि अनंत = स-१ ,

वजाबाकीनें $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} +$ इत्यादि अनंत = १ सर्वधन हें उत्तर .

दुसरें .

$१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} +$ इत्यादि पदें अनंत = स , ही सांगितली श्रेणी हिचें सर्वधन काट .

तेव्हां $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} +$ इत्यादि पदें अनंत = स-३

वजाबाकीनें $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} +$ इत्यादि = $\frac{३}{४}$

अथवा

२व्यांनीं भागून $\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} +$ इत्यादि = $\frac{३}{४}$ सर्वधन हें उत्तर .

तिसरें .

$\frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} +$ इत्यादि पदें अनंत = स ही सांगितली श्रेणी , हिचें सर्वधन काट .

तेव्हां $\frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} +$ इत्यादि पदें अनंत = स- $\frac{३}{२}$

वजावाकीनें $\frac{1}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{1}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \frac{1}{४ \cdot ५ \cdot ६} +$ इत्यादि $= \frac{1}{२}$

अथवा
२ स्थानीं भागून $\frac{1}{२ \cdot ३ \cdot ४} + \frac{1}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \frac{1}{४ \cdot ५ \cdot ६} +$ इत्यादि $= \frac{1}{४}$

चवथें.

$\frac{1}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \frac{1}{४ \cdot ५ \cdot ६} + \frac{1}{५ \cdot ६ \cdot ७} +$ इत्यादि परें अनंत आहेत, त्या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

आतां प्रत्येक छेदांचे वेगवेगळे गुणक सोड आणिते.

$\frac{1}{३ \cdot ४} + \frac{1}{४ \cdot ५} + \frac{1}{५ \cdot ६} +$ इत्यादि $=$ स घे.

तर $\frac{1}{४ \cdot ५} + \frac{1}{५ \cdot ६} + \frac{1}{६ \cdot ७} +$ इत्यादि $=$ स $-\frac{1}{३}$

वजावाकीनें $\frac{1}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \frac{1}{४ \cdot ५ \cdot ६} + \frac{1}{५ \cdot ६ \cdot ७} +$ इत्यादि $= \frac{1}{३}$

अथवा
३ स्थानीं भागून $\frac{1}{३ \cdot ४ \cdot ५} + \frac{1}{४ \cdot ५ \cdot ६} + \frac{1}{५ \cdot ६ \cdot ७} +$ इत्यादि $= \frac{1}{३}$ सर्वधन हे उत्तर.

पांचवें.

$\frac{1}{३ \cdot ४ \cdot ५ \cdot ६} + \frac{1}{४ \cdot ५ \cdot ६ \cdot ७} + \frac{1}{५ \cdot ६ \cdot ७ \cdot ८} + \frac{1}{६ \cdot ७ \cdot ८ \cdot ९} +$ इत्यादि परें अनंत आहेत, त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

उत्तर $\frac{१}{२४०}$.

साहायें.

$\frac{३५८-११}{१५८-११-१४} + \frac{४८१-११-१४}{४८१-१४-१७} + \frac{६१४-११-१७}{६१४-१७-२०} + \dots$
 इत्यादि पदे अनंत आहेत, त्या श्रेणीचे सर्वधन काढ.

उत्तर, $\frac{१}{७२}$.

आठवें कृत्य.

अनंतश्रेणीचे सर्वधन काढायाने, ती अनंतश्रेणी काण तेही अपूर्णपद वाढविल्यापासून उत्पन्न झाली असें कल्पून.

• रीति.

सांगितली श्रेणी एक अपूर्णपदाचे बरोबर करावी, ज्या अपूर्णपदाचे छेदांनी ती श्रेणी गुणिली तर गुणाकार सात होईल : हा गुणाकार घेतले अपूर्णपदाचे अंशांबरोबर असून त्याची किंमत निघेल.

उदाहरणें.

पहिले, $१५ + १५^२ + १५^३ + \dots$ इत्यादि अनंत पदे आहेत, त्या श्रेणीचे सर्वधन काढ.

आतां सांगितली श्रेणी = $\frac{३५}{१-१५}$ घे

तेव्हां $१५ + १५^२ + १५^३ + \dots$ इत्यादि.

गुणिली १- क्ष

क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + इत्यादि

- क्ष^१ - क्ष^२ - इत्यादि

ज्ञ = क्ष * *

व्याजकरितां क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + इत्यादि = $\frac{क्ष}{१-क्ष}$

जसें जर क्ष = $\frac{१}{३}$ तर $\frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \frac{१}{२७} +$ इत्यादि = $\frac{१}{३} \div \frac{१}{३} = १$

जर क्ष = $\frac{१}{३}$ तर $\frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \frac{१}{२७} +$ इत्यादि = $\frac{१}{३} \div \frac{१}{३} = १$

सर्वधन हे उत्तर.

दुसरें, क्ष + २ क्ष^२ + ३ क्ष^३ + इत्यादि अनंत पदें,
त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

आतां सांगितली श्रेणी = $\frac{ज्ञ}{(१-क्ष)^२} = \frac{ज्ञ}{१-२क्ष+क्ष^२}$

तेव्हां क्ष + २ क्ष^२ + ३ क्ष^३ + इत्यादि

गुणिली १-२ क्ष + क्ष^२

क्ष + २ क्ष^२ + ३ क्ष^३ + इत्यादि.

- २ क्ष^२ - ४ क्ष^३ - इत्यादि.

+ क्ष^३ + इत्यादि.

ज्ञ = क्ष * *

व्याजकरितां क्ष + २ क्ष^२ + ३ क्ष^३ + इत्यादि = $\frac{क्ष}{(१-क्ष)^२}$

जर क्ष = $\frac{१}{३}$, तर, $\frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \frac{१}{२७} + \frac{१}{८१} +$ इत्यादि = $\frac{१}{३} \div \frac{१}{३} =$

जर $क्ष = \frac{1}{3}$, तर $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{3} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$
सर्वधन हें उत्तर.

आणि त्या प्रमाणें पुढें ही आणखी प्रकार.

तिसरें, $क्ष + ४ क्ष^२ + ९ क्ष^३ + १६ क्ष^४ + \dots$ इत्यादि, त्या अनंतश्रेणीचें सर्वधन काढ.

$$\text{उत्तर, } \frac{क्ष(१+क्ष)}{(१-क्ष)^३}$$

समीकरण.

समीकरण म्हणजे बीजगणिताचा एक भाग आहे, जो अव्यक्तपदांच्या किमती त्या पदांच्या दुसऱ्या व्यक्तपदांशी जो संबंध आहे त्याचे साहाय्यानें काढायच्या वेगळ्या रीति दारवचितो.

कितीएक बीजगणितसंबंधी उद्देशक परस्पर बरोबर केल्यापासून हें होतें; त्या बरोबर केले उद्देशकांस समीकरण म्हणतात. नंतर त्याचे रीतीप्रमाणें गणित करित चलावें, अव्यक्तपद त्या समीकरणाचे बाजूस एकाकी राहीपर्यंत; म्हणजे दुसरे बाजूतील सांगितले व्यक्तपदांचे बरोबर

होईल

ज्यापदांपासून समीकरण समुत्पन्न झालें त्या पदांस समीकरणानीं पदें म्हणतात; आणि बरोबरीच्या = त्याचि न्हाचे दोडांकडे जे उद्देशक लिहिले आहेत, त्यांस समीकरणाचे दोन भाग अथवा दोन बाजू म्हणतात.

जसें जर $क्ष = अ + ब$ त्यांत $क्ष$, $अ$, आणि $ब$ हीं तीन पदें आहेत; आणि त्या उद्देशकाचा अर्थ हा कीं, कोणतेंही पद $क्ष$ समीकरणाची डावी बाजू, त्याची उजवी बाजू $अ$ आणि $ब$ हीं दोन पदें आहेत त्यांचे बेरिजेबरोबर आहे.

एकवर्ण समीकरण म्हणजे तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे प्रथम घात मात्र येतात.

जसें $क्ष + अ = ३ब$ अथवा $अक्ष = बक$ अथवा $२क्ष + ३अ = ५ब$ त्यांत $क्ष$ अव्यक्तपद दाखविता; आणि दुसरीं अक्षरचिन्हे आणि अंक व्यक्तपदें दाखवितात.

अनेकवर्ण समीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे दोन किंवा अधिक वेगळाले घात येतात.

जसें $क्ष^२ + अक्ष = ब$ अथवा $क्ष^२ - ४क्ष + ३क्ष = २५$ त्या समीकरणाच्या जाति अथवा नांवें त्यांतील

अव्यक्तपदांचे सर्वाहून मोठे घात येतात त्यांबद्दल तशी तशी होतात. जशी, वर्गसमीकरण, घनसमीकरण, चतुर्घातसमीकरण, इत्यादि.

वर्गसमीकरण तेच होय, ज्यांत अव्यक्तपद दोन घातांचें आहे, अथवा दुसरा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें, $x^2 = 2$ अथवा $x^2 + अक्ष = ब$ अथवा $३x^2 + १०x = १००$

घनसमीकरण तेच होय, ज्यांत अव्यक्तपद तीन घातांचें आहे, अथवा तिसरा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें, $x^3 = २७$ अथवा $२x^3 - ३x = ३५$ अथवा $x^3 - अक्ष + बक्ष = क$.

चतुर्घातसमीकरण तेच होय, ज्यांत अव्यक्तपद चार घातांचें आहे, अथवा चवथा घातपर्यंत चढतें आहे.

जसें, $x^4 = २५$ अथवा $५x^4 - ४x = ६$ अथवा $x^4 - अक्ष^2 + बक्ष^2 - कक्ष = ड$, इत्यादि समीकरणांस पंचघात, षट्घात, आणि त्यांहून अधिक महत्त्वजातीचीं उपपदे लागतात; त्या सर्वांस अव्यक्तपदांत सर्वाहून मोठा घात येतो तशीं नांवे होतात.

समीकरणांचें मूळ तशी संख्या किंवा पद आहे, जें अ

व्यक्तपदांचे स्थानी ठेविलें असतां समीकरणाच्या दोनही बाजू परस्पर उडतील, अथवा बरोबर होतील.

एकवर्णसमीकरणास एकच मूळ होतें, परंतु अनेक वर्णसमीकरणास तितकीं मुळें होतात; त्यांचे अव्यक्तपदांत जितके घात आहेत. अथवा त्यांतील पदांत सर्वांहून मोठा घातप्रकाशक आहे, त्यांचे संख्येइतकीं मुळें होतात, म्हणून तो दाखवितो.

जसें, $x^2 + 2x = 9$ त्या वर्णसमीकरणांत मूळ किंवा x अव्यक्तपदाची किंमत $+3$ आहे, किंवा -6 . आणि $x^2 - 9 = 0$ $x^2 + 2x = 2x$ त्या घनसमीकरणाचीं मुळें $2, 3$ आणि 0 हीं आहेत. म्हणजे त्या तीहींतून कोणतेही एक x चे स्थळीं ठेविलें असतां त्या समीकरणाच्या दोनही बाजू उडतील, अथवा बराबर होतील.

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति, ज्यांत एकच अव्यक्तपद आहे.

एकवर्णसमीकरण तशीं सर्व समीकरणें त्यांची रूति ही आहेकीं, सर्व समीकरणांच्या उदाहरणांत अव्यक्तपदाची किंमत काढितेस मधीं तें कोणतेही दुसरे व्यक्तपदाशीं संबद्ध असेल, त्यास तेथून सोडवून एक बाजूस लि-

हावें . आणि बाकी व्यक्तपदें दुसरे बाजूस लिहावीं . हेंच करायाकरितां वेगळालीं प्रत्यक्षप्रमाणें आणि कृति घेतली पाहिजे , म्हणून त्या दोहोंतील सर्वांहून उपयोगी जीं आहेत, तीं सांगतो . *

प्रथमप्रकार .

समीकरणाचे कोणतेही पदांचें स्वरान्तर त्या पदांचें चिन्ह बदल करून एक बाजूतून काढून दुसरे बाजूत नेतां येईल . असें केलें असतां ही दोन्ही बाजू किमतींत बराबरच राहातील .

* हें काम करायाची कृति या पुढील प्रत्यक्षप्रमाणांपासून प्रकट होते .

१ दोन समपदांत एकच पद प्रत्येकांत मिळविलें अथवा व जाकिलें तर दोन धरजा अथवा दोन बाक्या (२ आणि ३ प्र०) बरोबर होतील म्हणूनच एक वा गूने पद दुसरे बाजूस आणिलें तर त्यांचें धनरूप चिन्ह असेल तें बदल होतें हें ही तसेंच आहे .

२ कोणतीही दोन समपदें एकच पदानें प्रत्येकीं गुणिलीं अथवा भागिलीं तर त्यांचें दोन गुणाकार अथवा दोन भागाकार (१० आणि ७१ सि० प्र०) बराबर होतील .

३ कोणतीही एकाकी पदें किंवा संयुक्तपदें परस्पर बराबर असतील तर त्या पदांचें कोणतेही सारसे घात अथवा मूळें ही (७४ सि० प्र०) बराबर होतील .

आणि पुढील साहाय्यकारांचे उदाहरणांतील वेगळाल्या कृतींकरून हीं सर्व प्रत्यक्षें उघड होतील .

जसें, जर क्ष + ३ = ७ तर क्ष = ७ - ३ म्हणजे क्ष = ४

आणि जर क्ष - ४ + ६ = ८ तर क्ष = ८ + ४ - ६ म्हणजे क्ष = ६

आणि जर क्ष - अ + ब = क - ड तर क्ष = क - ड + अ - ब .

आणि जर ४ क्ष - ८ = ३ क्ष + २० तर ४ क्ष - ३ क्ष = २० + ८

म्हणजे क्ष = २८

त्या रीतीपासून हे निघते कीं, जर दोनही बाजूंस पदे एकरूप आणि एकच चिन्हांने युक्त आहेत, तर तीं त्या दोनही बाजूंतून टाकितां येतील, आणि कोणत्याही समीकरणाचे सर्व पदांचीं चिन्हे बदल करितां येतील. किंमत आहे तीच राहिल .

जसें जर क्ष + ५ = ७ + ५ तर रद्द करण्याचे रीतीनें क्ष = ७

आणि जर अ - क्ष = ब - क तर क्ष - अ = क - ब म्हणजे क्ष =

अ + क - ब .

दुसरा प्रकार .

कोणतेही समीकरणांत जर अव्यक्त पद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह त्या गुणकानें गुणायचें जोडिलें आहे, तर त्या गुणकानें सर्व दुसरीं पदे भागून तो गुणक त्या अव्यक्त पदापासून काढून उडवितां येईल . आणि जर अव्यक्त

पदकोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह त्या भाजकानें भागायाचें जो डिलें आहे, तर त्या भाजकानें सर्व दुसरीं पदे गुणून तो भाजक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल.

जसें, जर $अक्ष = ३$ अब-क तर $क्ष = ३$ ब-क

आणि जर $२क्ष + ४ = १६$ तर $क्ष + २ = ८$ म्हणजे

$$क्ष = ८ - २ = ६.$$

आणि जर $३क्ष = ५ + ३$ तर $क्ष = १० + ६ = १६.$

आणि जर $\frac{३क्ष}{३} - २ = ४$, तर $२क्ष - ६ = १२$, तर भागा-

कारानें $क्ष - ३ = ६$ अथवा $क्ष = ६ + ३ = ९$

तिसरा प्रकार.

जर कोणतेही समीकरणांत कांहीं अपूर्णबीजपदे असतील, तर त्या अपूर्णबीजपदांचे छेद उडवितां येतील. जे प्रतिपदांचे छेदांनीं अनुक्रमें त्या त्या पदावांचून राहिलीं सर्वपदे गुणिल्यापासून, अथवा अपूर्णबीजपदांचे सर्व छेद परस्पर गुणून त्या गुणाकारानें सर्व पदे गुणिल्यापासून, किंवा दोनही बाजूंतील सर्व पदे सर्व छेदांचे लघुतमसाधारण

* साधारणगुणाकार म्हणजे एक संख्या आहे, ज्यांत दुसरी कोणती

गुणाकारानें गुणिल्या पासून .

जसें जर $\frac{१२}{६} + \frac{१२}{४} = ५$ तर प्रथमपदाचे छेद ३ त्यांनींरी

ही संख्या कितीएक वेळां बरोबर जाते.

जसें, ६ही संख्या २या संख्येचा साधारणगुणाकार आहे . कारण, ६यांतून २बरोबर ३वेळां जातात .

आणि १२ ही संख्या ६, ४, ३ . या प्रत्येक संख्यांचा साधारणगुणाकार आहे, कारण, १२यांत प्रथमसंख्या ६ बरोबर २वेळां जातात, तसें दुसरी संख्या ४बराबर ३तीन वेळां जातात, आणि तिसरी संख्या ३ बरोबर ४ वेळां जातात .

कितीएक संख्या पदांचा लघुतमसाधारणगुणाकार काढायची रीति .

कितीएक संख्या पदे आहेत त्यांत बहुत पदे कोणत्या संख्येनें बराबर भागिलीं जातील, तें पाहून तो भाजक त्या ओळीचे भाजकस्थळीं लिहून जीं भागतील त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे खालीं लिहावे; आणि जीं नभागतील तीं तशींच त्यांचे खालीं लिहावीं . नंतर पुनः पूर्वप्रमाणेच दुसरा भाजक कळवून त्या दुसरे ओळींत पूर्ववत् करावे . या प्रमाणे करितां कदाचित् शेवटास दोन पदे पर्यंत नव भागिलीं जात, तर ते सर्वभाजक आणि तीं राहिलीं पदे परस्पर गुणून तो गुणाकार साधारणलघुतमगुणाकार झाला . असें समजावें .

उदाहरण .

७, ३५, ४२, २०, २४ या संख्या पदांचा साधारणलघुतमगुणाकार कर .

| | |
|-----|-------------------|
| ÷ ७ | ७, ३५, ४२, २०, २४ |
| ÷ ५ | १, ५, ६, ४, २४ |
| ÷ ६ | १, १, ६, ४, २४ |
| ÷ ४ | १, १, १, ४, ४ |
| | १, १, १, १, १ |

तर $७ \times ५ \times ६ \times ४ = ८४०$ हा त्या बराबरे पदांचा लघुतमसाधारणगुणाकार होय .

तीप्रमाणे गुणिल्याने $१५ + \frac{३६५}{१५} = १५$, पुनः राहिले पदाचे छेद ४
 त्यांनी गुणिल्याने $४ १५ + ३ १५ = ६०$, नंतर मिळवणीने $७ १५ =$
 ६० . आतां भागाकाराने $१५ = \frac{६०}{७} = ८\frac{४}{७}$

आणि जर $\frac{१५}{४} + \frac{१५}{३} = १०$ तर $४ \times ६ = २४$ म्हणजे त्यासर्व
 छेदांचे गुणाकाराने समीकरणाच्या दोन्ही बाजू गुणिल्याने
 $\frac{२४ १५}{४} + \frac{२४ १५}{३} = २४०$, अथवा $६ १५ + ८ १५ = २४०$, नंतर मिळ
 वणीने $१० १५ = २४०$. आतां भागाकाराने $१५ = \frac{२४०}{१०} = २४$.

आणि जर $\frac{१५}{४} + \frac{१५}{३} = १०$ तर ४ आणि ६ त्यांचा लघुतम
 साधारणगुणाकार १२ त्यांनी समीकरणाच्या दोन्ही बाजू गुणि
 ल्याने $\frac{१२ १५}{४} + \frac{१२ १५}{३} = १२०$, अथवा $३ १५ + ४ १५ = १२०$, नंतर
 मिळवणीने $७ १५ = १२०$. आतां भागाकाराने $१५ = \frac{१२०}{७} = २४$

त्या रीतीवरून कळते की, जर एकच संख्या अथवा
 अक्षरचिन्ह समीकरणाचे दोन बाजूंस गुणक अथवा भाज-
 क अशा रीतीने दुसरे पदाशी संयुक्त होऊन असेल, तर ती
 साधारणसंख्या अथवा ते अक्षरचिन्ह त्या दोनही बाजूंतून
 वडवितां येईल, परंतु किंमत आहे तीच आहे.

जसे, जर $अक्ष = अब + अक$, तर रद्द केल्याने
 $क्ष = ब + क$

आणि जर $\frac{क्ष}{अ} + \frac{ब}{अ} = \frac{क}{अ}$, तर रद्द केल्याने $क्ष + ब =$

क, म्हणजे क्ष=क-ब

चवथा प्रकार.

जर कोणतेही समीकरणांत अव्यक्तपद करणीरूप आहे तर (१ प्रकाराप्र०) सर्व पदांस स्थळांतर करावे, असें कीं अव्यक्तपद समीकरणाने एक बाजूस एकलं येईल, आणि राहिलीं सर्व पदे दुसरे बाजूस येतील. नंतर समीकरणाच्या दोनही बाजू करणीच्या घातापर्यंत वाढवाव्या, म्हणजे उद्देशक समीकरणखंडपदापासून मुक्त होईल.

जसें जर $\sqrt{क्ष-२}=३$ तर स्थळांतरानें $\sqrt{क्ष}=३+२=५$ नंतर वर्ग केल्यानें $क्ष=२५$

आणि जर $\sqrt{३क्ष+४}=५$ तर वर्ग केल्यानें $३क्ष+४=२५$ नंतर स्थळांतरानें $३क्ष=२५-४=२१$ आणि भागाकारानें $क्ष=\frac{२१}{३}=७$

आणि जर $\sqrt[३]{२क्ष+३+४}=८$, तर स्थळांतरानें $\sqrt[३]{२क्ष+३}=८-४=४$, नंतर घन केल्यानें $२क्ष+३=४^३=६४$, पुनः स्थळांतरानें $२क्ष=६४-३=६१$. आतां भागाकारानें $क्ष=\frac{६१}{२}=३०\frac{१}{२}$

पांचवा प्रकार .

जर समीकरणाचे बाजूंत अव्यक्तपद कोणताही एक पूर्णघात असेल, तर त्या समीकरणाचा त्या रीतीने संक्षेपकेला जातो, जे समीकरणाचे दोनही बाजूंचे पदांचे त्या पूर्णघाताचे मूळ काढावे.

जसे, जर $x^2 = 69$ तर $x = \sqrt{69} = 9$.

आणि जर $x^2 = 209$ तर $x = \sqrt{209} = 13$.

आणि जर $x^2 - 9 = 28$ तर स्त्रळ्यांतराने $x^2 = 28 + 9 = 37$ नंतर भागाकाराने $x = \sqrt{37} = 99$ नंतर वर्गमूळ काढिल्याने $x = \sqrt{99}$.

आणि जर $x^2 + 6x + 9 = 209$ तर विचोरं पाहातां करणीचे डावे बाजूंत एक पूर्णघात म्हणजे वर्ग आहे, तेव्हां वर्गमूळ काढिल्याने $x + 3 = \sqrt{209} = \sqrt{19 \times 11} = 13$ तर स्त्रळ्यांतराने $x = 13 - 3$.

साहावाप्रकार .

कोणतेही प्रमाणास त्याचे दोन शेषटपदांचा गुणाकार दोनमध्यपदांचे गुणाकाराबरोबर आहे, तो कल्यानें समीकरणाचे रूप देतां येईल .

जसें जर ३ क्ष : १६ : : ५ : ६ तर ३ क्ष × ६ =
 १६ × ५ अथवा १८ क्ष = ८० तर भागाकारानें क्ष = $\frac{६०}{३} = \frac{४०}{१}$
 = ४ $\frac{४}{१}$

आणि जर $\frac{३क्ष}{१६} : अ : : ब : क$ तर $\frac{३क्ष}{१६} \times क = अ \times$
 ब अथवा $\frac{३क्षक}{१६} = अब$, गुणाकारानें २ क्षक = ३अब, भा
 गाकारानें क्ष = $\frac{३अब}{२क}$

आणि जर १२ - क्ष : क्ष : : ४ : १ तर १२ - क्ष = २क्ष
 तर स्थळांतरानें १२ = २क्ष + क्ष = ३क्ष, भागाकारानें क्ष =
 $\frac{१२}{३} = ४$

पूर्वप्रकारांची वेगळालीं उदाहरणां .

पहिलें, ७ क्ष - १८ = ४ क्ष + ६ त्या समीकरणांत क्ष
 अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

$$०. आतां ७ क्ष - १८ = ४ क्ष + ६.$$

$$\text{स्थळांतरानें, } ७ क्ष - ४ क्ष = ६ + १८$$

$$\text{तर } \dots ३क्ष = २४$$

$$\text{भागाकारानें } \therefore \therefore क्ष = \frac{२४}{३} = ८ \text{ हें उत्तर}$$

दुसरें, २० - ४ क्ष = १२ = १२ - १० क्ष त्या समीकरणां
 त क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

आतां २०-४ क्ष-१२=९२-१० क्ष

स्वळांतरानें, . . . १० क्ष-४ क्ष=९२-२०+१२

तर, ६ क्ष=८४.

भागाकारानें, क्ष= $\frac{८४}{६}$ = १४ हें उत्तर

तिसरें, ४ अक्ष-५ ब = ३ उक्ष+२ क त्या स-

मीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

आतां ४ अक्ष-५ ब = ३ उक्ष+२ क

स्वळांतरानें, ४ अक्ष-३ उक्ष = ५ ब+२ क

तर, ४ अ-३ उ त्यांनीं भागून क्ष = $\frac{५ ब+२ क}{४ अ-३ उ}$ हें उत्तर

चौथें, ५ क्ष^१-१२ क्ष = ९ क्ष+२ क्ष^१ त्या समीक-

रणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

आतां, ५ क्ष^१-१२ क्ष = ९ क्ष+२ क्ष^१ त्यां-

त सर्व पदांचा साधारण गुणक क्ष

त्यानें ती भागून . . . ५ क्ष-१२ = ९+२क्ष

स्वळांतरानें . . . ५ क्ष-२ क्ष=१२+९

तर ३ क्ष = २१

भागाकारानें क्ष = $\frac{२१}{३}$ = ७ हें उत्तर.

पांचवें, ९ अक्ष^१-१५ अबक्ष^१ = ६ अक्ष^१+१२

अक्ष^१ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत

काय ?

आतां, ९ अक्षरं - १५ अबक्षरं = ६ अक्षरं + १२ अक्षरं
त्यांत सर्व पदांचा साधारण गुणक ३ अक्षरं

त्यानें ती भागिल्यानें, . . . ३ अक्षरं - ५ ब = २ अक्षरं + ४

स्त्रयंतरानें, . . . ३ अक्षरं - २ अक्षरं = ५ ब + ४

तर, . . . अक्षरं = ५ ब + ४ हें उत्तर .

साहायें, $\frac{१५}{३} - \frac{१५}{५} + \frac{१५}{६} = २$ त्या समीकरणांत अक्षरं
अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

आतां $\frac{१५}{३} - \frac{१५}{५} + \frac{१५}{६} = २$

प्रथमछेद ३ त्यांनीं गुणून $१५ - \frac{३१५}{५} + \frac{३१५}{६} = ६$

दुसरे छेद ४ त्यांनीं गुणून $४ अक्षरं - ३ अक्षरं + \frac{१२ अक्षरं}{६} = २४$

राहिले छेद ५ त्यांनीं गुणून $२० अक्षरं - १५ अक्षरं + १२ अक्षरं = १२०$

तर $११ अक्षरं = १२०$

भागाकारानें, . . . अक्षरं = $\frac{१२०}{११} = ११\frac{१}{११}$, हें उत्तर .

दुसरे रीतीनें,

$\frac{१५}{३} - \frac{१५}{५} + \frac{१५}{६} = २$

३ . ४ . ५ हे सर्व छेद परस्पर गुणून .

६ . त्यांनीं सर्व पदें गुणिल्यानें $\frac{६० अक्षरं}{३} - \frac{६० अक्षरं}{५} + \frac{६० अक्षरं}{६} = १२०$

तर $२० अक्षरं - १५ अक्षरं + १२ अक्षरं = १२०$.

$$\text{तर} \cdot \cdot \cdot \cdot १७ \text{ क्ष} = १२०$$

$$\text{भागाकारानें} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{क्ष} = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१०}{१७}$$

हैं पूर्ववत् उत्तर .

सातवें, $\frac{\text{क्ष}-५}{३} + \frac{\text{क्ष}}{३} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{३}$ त्या समीकरणां
त क्ष अव्यक्त पद आहे , त्याची किंमत काय ?

$$\text{आतां } \frac{\text{क्ष}-५}{३} + \frac{\text{क्ष}}{३} = १२ - \frac{\text{क्ष}-१०}{३}$$

प्रथम छेद ३ त्यांनी गुणिल्यानें , $\text{क्ष}-५ + \frac{३\text{क्ष}}{३} = ३६ - \text{क्ष} + १०$

दुसरे छेद २ त्यांनी गुणिल्यानें , $२ \text{ क्ष} - १० + ३ \text{ क्ष} = ७२ -$
 $२ \text{ क्ष} + २०$

स्तब्ध अंतरानें , $\cdot \cdot \cdot \cdot २ \text{ क्ष} + ३ \text{ क्ष} + २ \text{ क्ष} = ७२ + २० + १०$

$$\text{तर} , \cdot \cdot \cdot \cdot ७ \text{ क्ष} = १०२$$

भागाकारानें , $\cdot \cdot \cdot \cdot \text{क्ष} = \frac{१०२}{७} = १४\frac{६}{७}$ हैं उत्तर .

आठवें, $\sqrt{३\text{क्ष}} + ७ = १०$ त्या समीकरणांत क्ष अ-
व्यक्त पद आहे , त्याची किंमत काय ?

$$\text{आतां} , \sqrt{३\text{क्ष}} + ७ = १०$$

स्तब्ध अंतरानें , $\cdot \cdot \cdot \cdot \sqrt{३\text{क्ष}} = १० - ७ = ३$

वर्ग केल्यानें , $\cdot \cdot \cdot \cdot \frac{३\text{क्ष}}{३} = ३^२ = ९$

गुणाकारानें , $\cdot \cdot \cdot \cdot ३ \text{ क्ष} = ३६$

भागाकारानें , $\cdot \cdot \cdot \cdot \text{क्ष} = \frac{३६}{३} = १२$ हैं उत्तर .

नववें, $२१५ + २\sqrt{अ^२ + ११२} = \frac{५अ}{\sqrt{अ^२ + ११२}}$ त्या समीकरणोंत १५ अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

आतां, $२१५ + २\sqrt{अ^२ + ११२} = \frac{५अ}{\sqrt{अ^२ + ११२}}$

आतां, $\sqrt{अ^२ + ११२}$ त्यानें गुणिल्यानें $२१५\sqrt{अ^२ + ११२} + २(अ^२ + ११२) = ५अ$

तर, $२१५\sqrt{अ^२ + ११२} + २अ^२ + २२४ = ५अ$

स्थळानंतरानें, $२१५\sqrt{अ^२ + ११२} = ५अ - २२४$

वर्ग केल्यानें, $४६०८२५ \times अ^२ + ११२ = २५अ^२ - २१२८$

तर, $४६०८२५ + ४६०८२५ = २५अ^२ - १२०८२५ + ४६०८२५$

दोनही बाजूनीं ४६०८२५ हीं दोन पदे

टाकिल्यानें, $४६०८२५ = २५अ^२ - १२०८२५$

स्थळानंतरानें, $४६०८२५ + १२०८२५ = २५अ^२$

तर, $१६६९०५० = २५अ^२$

भागाकारानें, $६६७६२ = \frac{अ^२}{१६६९०५०} = \frac{अ^२}{१६६९०५०}$

वर्गमूळ केल्यानें $२५८ = \sqrt{\frac{अ^२}{१६६९०५०}} = \frac{अ}{२५८}$ अ हें उत्तर

दाहावें, $२१५ - ५ + १६ = २१$ त्या समीकरणोंत १५ अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

उत्तर, $१५ = ५$

अकरावें, $६१५ - १५ = १५ + ६$ त्या समीकरणोंत १५ अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = ४\frac{१}{२}$$

बारावें, $८ - ३ \text{क्ष} + १२ = ३० - ५ \text{क्ष} + ४$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = ७$$

तेरावे, $\text{क्ष} + \frac{१}{२} \text{क्ष} - \frac{१}{४} \text{क्ष} = १३$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = १२$$

चौदावें, $३ \text{क्ष} + \frac{१}{२} \text{क्ष} + २ = ५ \text{क्ष} - ४$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = ४$$

पंधरावें, $४ \text{अक्ष} + \frac{१}{३} \text{अ} - २ = \text{अक्ष} - ६$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = \frac{६ - \text{अ}}{३\text{अ} + ३६}$$

सोळावें, $\frac{१}{३} \text{क्ष} - \frac{१}{४} \text{क्ष} + \frac{१}{६} \text{क्ष} = \frac{१}{२}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = \frac{३०}{१३}$$

सत्रावें, $\sqrt{४ + \text{क्ष}} = ४ - ५ \text{क्ष}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = २\frac{१}{४}$$

अठरावें, $४अ + क्ष = \frac{क्ष^२}{४अ + क्ष}$ त्या समीकरणांत
क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = -२अ$$

एकुणिसावें, $\sqrt{४अ^२ + क्ष^२} = \sqrt[५]{४ब^२ + क्ष^२}$ त्या समीक-
रणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{ब^२ - ४अ^२}{२अ}$$

विसावें, $\sqrt{क्ष} + \sqrt{२अ + क्ष} = \frac{४अ}{\sqrt{२अ + क्ष}}$ त्या समीकरणां
त क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{३}{२}अ$$

एकविसावें, $\frac{अ}{१ + २क्ष} + \frac{अ}{१ - २क्ष} = २$ ब त्या समीक-
रणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{१}{२} \sqrt{\frac{ब-अ}{ब}}$$

बेविसावें, $अ + क्ष = \sqrt{अ^२ + क्ष^२} \sqrt[५]{४ब^२ + क्ष^२}$ त्या समी-
करणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{ब^२}{अ} - अ$$

एकवर्णसमीकरणपृथक्करणाची रीति.

जेव्हां दोन अव्यक्तपदे आहेत तीं वेगळाने दोन

समीकरणांत येतात, तेव्हां पुढील तीन रीतींमून एके रीतीनें त्या दोन समीकरणांस एकत्र करून त्यांचें एकच समीकरण करितां येईल.

प्रथमरीति.

प्रत्येकसमीकरणांत पूर्वी सांगितले रीतीकरून एक अव्यक्तपदाची किंमत राहिले दुसरे पदांचे किमतीकरून काढावी. नंतर त्या दोन बराबर किमतीपासून एक नवें समीकरण होईल, ज्यांत अव्यक्तपद एकच येईल, त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणें निघेल.*

टीप. त्यांत उघड दिसतें कीं, ज्या अव्यक्तपदाची किंमत काढायामेळणें म्हणजे आहे, त्यापासून सांगितले समीकरणांत किंमत काढायामेळणें आरंभ करावा.

उदाहरणें.

पहिलें, $\left\{ \begin{array}{l} ३५ + ३५ = १७ \\ ५५ - २५ = १४ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील ३५ आणि ५ त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

* दारीतीम तें प्रत्यक्ष आश्रय होय, ज्यावमू एकचमूशी बराबर त्या सर्व परस्पराबराबर, तसें पुढील दोन रीतींसही आश्रय उघड प्रकटार्थच आहेत.

प्रथम समीकरणांत २ क्ष + ३ य = १७ , क्षची किंमत काढा-
याकरितां ३ य त्यांस स्थळांतर करून २ त्यांनीं भागिल्यानें

$$\text{क्ष} = \frac{१७ - ३\text{य}}{२}$$

दुसरे समीकरणांत ५ क्ष - २ य = १४ , क्षची किंमत काढाया
करितां २ य त्यांस स्थळांतर करून ५ त्यांनीं भागिल्यानें

$$\text{क्ष} = \frac{१४ + २\text{य}}{५}$$

नंतर, क्षच्या दोन किमती परस्पर बराबर करून

$$\frac{१७ - ३\text{य}}{२} = \frac{१४ + २\text{य}}{५}$$

आतां पूर्वरीतीनें २ आणि ५ त्या छेदांनीं गुणिल्यानें

$$८५ - १५\text{य} = २८ + ४\text{य}$$

स्थळांतरानें, $८५ - २८ = ४\text{य} + १५\text{य}$

तर, $१९\text{य} = ५७$

भागाकारानें, $\text{य} = \frac{५७}{१९} = ३$

नंतर यची किंमत पूर्व कोणतेही समीकरणांत उघड
मांडिल्यानें, प्रथमांत $\text{क्ष} = \frac{१७ - ९}{२} = ४$ आणि दुसऱ्यांत
 $\text{क्ष} = \frac{१४ + ६}{५} = ४$ हे उत्तर.

दुसरें, $\left. \begin{array}{l} \text{क्ष} + \text{य} = \text{अ} \\ \text{क्ष} - \text{य} = \text{ब} \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील
 क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील $क्ष = अ - य$

आणि दुसऱ्यांतील, . . . $क्ष = ब + य$

त्याज करितां, . . . $अ - य = ब + य$

नंतर स्खळांतरानें, $२य = अ - ब$

भागाकारानें, $य = \frac{अ - ब}{२}$

प्रथमांत यची ही किंमत उघड लिहिल्यानें $\{ क्ष = अ - \frac{अ - ब}{२} = \frac{अ + ब}{२} \}$

दुसऱ्यांत यची ही किंमत उघड लिहिल्यानें $\{ क्ष = ब + \frac{अ - ब}{२} = \frac{अ + ब}{२} \}$

हीं दोनही बराबर हें उत्तर .

तिसरें, $\left\{ \begin{array}{l} \frac{१}{३} क्ष + \frac{१}{३} य = ७ \\ \frac{१}{३} क्ष + \frac{१}{३} य = ८ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांती

ल क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

आतां प्रथम समीकरणांतील $\frac{क्ष}{३} = ७ - \frac{य}{३}$

गुणाकारानें, . . . $क्ष = १४ - \frac{३य}{३}$

दुसऱ्यांतील, . . . $\frac{क्ष}{३} = ८ - \frac{य}{३}$

गुणाकारानें, . . . $क्ष = २४ - \frac{३य}{३}$

त्याज करितां, . . . $२४ - \frac{३य}{३} = १४ - \frac{३य}{३}$

प्रथमछेद २ त्यांनीं गुणिल्यानें . $४८ - ३य = २८ - ३य$

दुसरेछेद ३ त्यांनीं गुणिल्यानें . $१४४ - ९य = ८४ - ४य$

स्खळांतरानें, . . . $१४४ - ८४ = ९य - ४य$

तर, $६० = ५य$

अथवा, $५य = ६०$

भागाकारानें, $य = \frac{६०}{५} = १२$

प्रथमांतयची किंमत १२ ती लिहिल्यानें, $१४ = १४ - \frac{३ \times १२}{३} = १४ - ८ = ६$ }
दुसऱ्यांतयची किंमत १२ ती लिहिल्यानें, $१४ = २४ - \frac{३ \times १२}{३} = २४ - १८ = ६$ }

हीं दोनही बराबर हें उत्तर .

चौथें, $\left\{ \begin{array}{l} \frac{३}{२}१ + २य = अ \\ \frac{३}{२}१ - २य = ब \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील

१४ आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

उत्तर, $१४ = अ + ब$ आणि $य = \frac{१}{२}अ - \frac{३}{२}ब$

पांचवें, $\left\{ \begin{array}{l} ३१ + य = २९ \\ ३य + १४ = १८ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील १४

आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, $१४ = ६$ आणि $य = ४$

साहायें $\left\{ \begin{array}{l} \frac{३}{२}१ + \frac{३}{४}य = ४ \\ \frac{३}{२}१ + \frac{३}{२}य = ३३ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील

१४ आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, $१४ = ६$ आणि $य = ३$

सातवें, $\frac{३१}{३} + \frac{३य}{५} = \frac{३९}{५}$ आणि $\frac{३१}{५} + \frac{३य}{३} = \frac{६०}{५}$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष=२ आणि य=४

आठवें, क्ष + २ य = स आणि क्ष - ४ य = ड त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = $\frac{स+ड}{२}$ आणि य = $\frac{स-ड}{४}$

नववें, क्ष - २ य = ड, आणि क्ष : य : : अ : ब, त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = $\frac{अड}{अ-२ब}$ आणि य = $\frac{बड}{अ-२ब}$

दुसरीरीति.

दोन समीकरणांत अति सोईचे जें अव्यक्तपद असेल त्याची किंमत प्रथम काढ, नंतर दुसऱ्या समीकरणांत ती किंमत त्या अव्यक्ताचे स्थळीं लिहिल्यानें दुसरें नवें समीकरण होईल, असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्त पद राहिल . नंतर

त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणे काढितां येईल.

उदाहरणं.

पहिलें, $\left\{ \begin{array}{l} क्ष+२य=१७ \\ ३क्ष-य=२ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईचे अव्यक्तपद क्ष आहे, त्या जकरितां तेथून आरंभ करावा. क्ष=१७-२य म्हणून ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहून, $३(१७-२य)-य=२$

तर, $५१-६य-य=२$

स्थळांतरानें, $-६य-य=२-५१$

सर्व चिह्ने बदल करून $६य+य=५१-२$

तर, $७य=४९$

भागाकारानें, $य=\frac{४९}{७}=७$

तर, $क्ष=१७-२य$

म्हणजे, $क्ष=१७-२\times ७=१७-१४=३$ हें उत्तर.

दुसरें, $\left\{ \begin{array}{l} क्ष+य=११ \\ क्ष-य=३ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष

आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईचे अव्यक्तपद क्ष आहे ,
 त्याजकरितां तेथून आरंभ करावा . क्ष = १३ - य म्हणून
 ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहून , १३ - य - य = ३
 स्थळांतरां वचिन्हें बदल करून २य = १३ - ३ = १०
 भागाकारानें य = $\frac{१०}{२}$ = ५
 तर , क्ष = १३ - य
 म्हणजे , क्ष = १३ - ५ = ८ हें उत्तर .

तिसरें, { क्ष : य :: अ : ब } त्या दोन समीकरणांत
 क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .
 आतां प्रमाणास समीकरणरूप दिल्यानें बक्ष = अय
 भागाकारानें , क्ष = $\frac{अय}{ब}$
 ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहिल्यानें ($\frac{अय}{ब}$) + य = क

अथवा $\frac{अय}{ब} + य = क$

छेद काढिल्यानें अय + बय = बक

अ + ब त्यानें भागिल्यानें य = $\frac{बक}{अ + ब}$

वर्गमूळानें य = $\sqrt{\frac{बक}{अ + ब}} = ब \sqrt{\frac{क}{अ + ब}}$

ही किंमत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहिल्यानें क्ष = $\frac{अ \times ब \sqrt{\frac{क}{अ + ब}}}{ब} = अ \sqrt{\frac{क}{अ + ब}}$

हैं उत्तर .

चवथें, $२ \text{ क्ष} + ३ \text{ य} = २९$ आणि $३ \text{ क्ष} - २ \text{ य} = ११$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर , क्ष = ७ आणि य = ९ .

पांचवें, $\text{क्ष} + \text{य} = १४$ आणि $\text{क्ष} - \text{य} = २$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर , क्ष = ८ आणि य = ६ .

साहाबें, $\left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} : \text{य} :: ३ : २ \\ \text{क्ष} - \text{य} = २० \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील

क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर , क्ष = ६ आणि य = ४ .

सातवें, $\frac{\text{क्ष}}{३} + ३ \text{ य} = २१$ आणि $\frac{\text{क्ष}}{४} + ३ \text{ क्ष} = २९$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर , क्ष = ९ आणि य = ६ .

आठवें, $१० - \frac{\text{क्ष}}{३} = \frac{\text{य}}{४} + ४$ आणि $\frac{\text{क्ष} - \text{य}}{३} + \frac{\text{क्ष}}{४} - २ = \frac{२\text{य} - \text{क्ष}}{१}$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ८ आणि य = ६

नववें, क्ष : य : : ४ : ३ आणि क्ष^३ - य^३ = ७७ त्या
दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची
किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ४ आणि य = ३

तिसरीरीति .

सांगितलीं दोन समीकरणे तशा संख्येने किंवा अक्षर
चिन्हांने गुणाची किंवा भागाची, कीं जेणेकरून दोहांतही ए
क अव्यक्त पद बरोबर होईल .

नंतर त्यांतील धन ऋण चिन्हे जसें दारबितात तसें
त्या दोन समीकरणांची बेरीज किंवा वजाबाकी केल्यानें ए
क नवें समीकरण होईल . असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्त
पद राहिल . त्यांची किंमत पूर्वरीतीनें काढितां येईल . म्ह-
णजे जेव्हां त्या दोन बरोबर अव्यक्तपदांचीं चिन्हे विरूप
आहेत, तेव्हां त्या दोन समीकरणांची मिळवणी करावी .
आणि जेव्हां तीं सरूप आहेत तेव्हां वजाबाकी करावी .

टीप , विषमवेळाप्रकाशक पदे समवेळाप्रकाशक

करणे तर परस्परसंज्ञ परस्परसंज्ञे वेद्यप्रकाशकांनीं गुणावीं.

उदाहरणे.

पहिलें, $\left\{ \begin{array}{l} ३क्ष+५य=४० \\ क्ष+२य=१४ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील
 क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .
 आतां दुसरे समीकरणस ३त्यांनीं गुणून $\frac{३क्ष+५य=४०}{३क्ष+५य=४०}$ नंतर
 त्यांतून प्रथम समीकरण वजा करून, $य=२$ ही यची
 किंमत दुसरे समीकरणांत लिहून $क्ष=१४-२य$
 म्हणजे, $क्ष=१४-२\times २=१४-४=१०$
 उत्तर, $क्ष=१०$ आणि $य=२$

दुसरें, $\left\{ \begin{array}{l} ५क्ष-३य=९ \\ २क्ष+५य=१६ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील
 क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .
 आतां त्या समीकरणांतील प्रथमपदें ज्यांत क्ष अ-
 व्यक्तपद आहे तीं इच्छित्याप्रमाणे बरोबर करितां येतील .
 अथवा दुसरीं पदें ज्यांत य अव्यक्तपद आहे तीं बरोबर
 करितां येतील . दोन प्रथमपदें बरोबर करायास प्रथम स-
 मीकरण २ त्यांनीं आणि दुसरें ५ त्यांनीं गुणावें . आणि दुसरीं
 पदें बरोबर करणें तर प्रथम ५ त्यांनीं आणि दुसरें ३त्यां.

नीं गुणावें. जैसे पुटें सांगतो.

१ प्रथम पदें बराबर करायास प्रथम समीकरण २त्यांनीं गुणावें.

म्हणजे,

$$१० \text{ क्ष} - ६ \text{ य} = १८$$

आणि दुसरें २त्यांनीं गुणावें म्हणजे $१० \text{ क्ष} + २५ \text{ य} = ८०$

नंतर वरचें खालच्यांत वजा करून

$$३१ \text{ य} = ६२$$

भागाकारांनं

$$\text{य} = \frac{६२}{३१} = २ \text{ त्याज}$$

करितां ही किंमत प्रथमांत यचे स्थळीं लिहून

$$\text{क्ष} = \frac{१८ + ६२}{१०} =$$

$$\frac{१८ + ६२}{१०} = \frac{८०}{१०} = ८$$

२ दुसरीं पदें बराबर करायास प्रथम समीकरण २त्यांनीं गुणावें.

म्हणजे,

$$२५ \text{ क्ष} - १५ \text{ य} = ४५$$

आणि दुसरें ३ त्यांनीं गुणावें म्हणजे $६ \text{ क्ष} + १५ \text{ य} = ४८$

नंतर दोहोंनी मिळवणी करून

$$३१ \text{ क्ष} \times \times = ९३$$

भागाकारांनं,

$$\text{क्ष} = \frac{९३}{३१} = ३ \text{ ही किं-}$$

मत प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहावीं, - य = $\frac{४५ - ७५}{-१५}$

अथवा य = $\frac{४५ - ७५}{-१५} = \frac{४५ - ७५}{-१५} = \frac{३०}{-१५} = २$

उत्तर, क्ष = ३ आणि य = २

तिसरें, $\frac{१८ + ६२}{१०} + ६ \text{ य} = २१$ आणि $\frac{४५ - ७५}{-१५} + ५ \text{ क्ष} = २३$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

उत्तर, $\text{क्ष} = ४$ आणि $\text{य} = ३$

$$\text{चवथे, } \frac{३\text{क्ष} - \text{य}}{४} + १० = १३ \text{ आणि } \frac{३\text{य} + \text{क्ष}}{३} + ५ = १५$$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

उत्तर, $\text{क्ष} = ५$ आणि $\text{य} = ३$

$$\text{पांचवे, } \frac{३\text{क्ष} + ४\text{य}}{५} + \frac{\text{क्ष}}{५} = १० \text{ आणि } \frac{६\text{क्ष} - ३\text{य}}{३} + \frac{\text{य}}{३} = १४$$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

उत्तर, $\text{क्ष} = ८$ आणि $\text{य} = ५$

$$\text{साहाबे, } ३\text{क्ष} + ४\text{य} = ३० \text{ आणि } ४\text{क्ष} - ३\text{य} = ९$$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

उत्तर, $\text{क्ष} = ६$ आणि $\text{य} = ५$

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति.

जेव्हा तीन आदिकरून अव्यक्त पदे आहेत .

जेव्हां तीन अव्यक्तपदें बेगळाले समीकरणांत येतात, तेव्हां त्या पुढील रीतीकरून त्यांचें एकत्र समीकरण होईल.

रीति.

१ त्या प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्तपदाची किंमत काढावी, ती अशीकीं, राहिले दोन अव्यक्तपदांची किंमत ठाऊक आहेच असें मानून. नंतर त्या किमतींत प्रथम दुसरीचें बरोबर करावी, आणि प्रथम किंवा दुसरी ति सरीचें बरोबर करावी, म्हणजे दोन नवीं समीकरणें होतील. ज्यांत दोन मात्र अव्यक्तपदें राहातील. ज्यांची किंमत पूर्वरीतीकरून निघेल. त्या पासूनच निसर्ग्याची किंमत साफ कळेल.

२ अथवा एक समीकरणांतील एक अव्यक्तपदाची किंमत काढून ती राहिले दोन समीकरणांत त्या अव्यक्तपदाचे स्थळी लिहून दोन नवीं समीकरणें होतील, ज्यांत दोन मात्र अव्यक्तपदें येतील. नंतर पूर्वरीतीकरून त्यांची किंमत निघेल.

३ अथवा एकेक समीकरण तशी संख्या किंवा अक्षरबिन्दू त्यांचें गुणाचें, अथवा भागाचें; ज्यापासून त्या सर्व

समीकरणांत एक पद बराबर होईल. नंतर त्या तीन समीकरणांतून कोणतीही दोन समीकरणे तिसऱ्यांतून वजा केलीं अथवा कोणतेही दोहोंची तिसऱ्याशीं बेरिज घेतली, जसें त्यांचे चिन्हापासून कळेल तसें करावें, तर दोन नवीं समीकरणे होतील. अशीं कीं, ज्यांतील अव्यक्तपदांची किंमत पूर्वरीतीकरून काढितां येईल.

आणि त्या रीतीनें ४, ५ किंवा त्याहून अधिक अव्यक्तपदां असतील तीं तितकी संख्या समीकरणांतून निःशेष करितां येईल, परंतु अशा प्रकारचे समीकरणांतील अव्यक्तपदांची किंमत काढायाची रीति त्याहून थोडक्यांत आणि अनिसोपी आहे, ती बीजगणिताचा अति अभ्यास केला असता प्रकट होईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} = ९ \\ \text{क्ष} + २\text{य} + ३\text{ज्ञ} = १६ \\ \text{क्ष} + ३\text{य} + ४\text{ज्ञ} = २१ \end{array} \right\}$ त्या तीन समीकरणांतील

क्ष य आणि ज्ञ त्या तीन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

पहिले रीतीनें,

त्या प्रत्येक समीकरणांत य आणि ज्ञ त्यांस स्थळांतर करून लिहि.

$$क्ष = ९ - य - ज्ञ$$

$$क्ष = १६ - २य - ३ज्ञ$$

$$क्ष = २१ - ३य - ४ज्ञ$$

नंतर प्रथम किंमत दुसरीशी बराबर करून $९ - य - ज्ञ = १६ - २य - ३ज्ञ$ } ही दोन
 तसेच दुसरी तिसरीशी बराबर करून $१६ - २य - ३ज्ञ = २१ - ३य - ४ज्ञ$ } यांस मी.
 करणें.

त्यांतील प्रथमांत ९ आणि ३ ज्ञ आणि २य त्यांस

म्हळ्यांतर करून

$$य = ७ - २ज्ञ$$

दुसऱ्यांत १६ आणि ३ ज्ञ आणि ३ य त्यांस ० य = ५ - ज्ञ

} यच्या दोन

किमती बराबर करून, $५ - ज्ञ = ७ - २ज्ञ$

० आणि ० ज्ञ त्यांस म्हळ्यांतर करून $ज्ञ = २$

तेव्हां य = ५ - ज्ञ म्हणजे य = ५ - २ = ३

आणि क्ष = ९ - य - ज्ञ म्हणजे क्ष = ९ - ३ - २ = ४

उत्तर, क्ष = ४ य = ३ ज्ञ = २

दुसरे रीतीने,

प्रथम समीकरणांत क्ष = ९ - य - ज्ञ ही क्षची किंमत दु-
 सऱ्या समीकरणांत लिहून $९ + य + २ ज्ञ = १६$ } ही दोन नवीं समी
 आणि तिसऱ्यांत $९ + २य + ३ ज्ञ = २१$ } करणें झालीं.

प्रथमांत ९ आणि २ ज्ञ त्यांस म्हळ्यांतर करून य = ७ - २ज्ञ

ही यची किंमत शेवटील समीकरणांत लिहून $९ + १४ - ४ ज्ञ + ३ ज्ञ = २१$

स्वच्छांतरानिं, २ = ज्ञ

त्याजकरितां . य = ७ - २ = ५

म्हणजे . . . य = ७ - ४ = ३

आणि . . . क्ष = ९ - य - ज्ञ

म्हणजे . . . क्ष = ९ - ३ - २ = ४

उत्तर, क्ष = ४, य = ३, ज्ञ = २ पूर्ववत् आहे.

तिसरे रीतीनें,

प्रथम समीकरण दुसऱ्यांतून वजा करून य + २ज्ञ = ७ } हीं दोन नवीं
 आणि दुसरें तिसऱ्यांतून वजा करून य + ज्ञ = ५ } समीकरणां
 प्रथमांतून दुसरें वजा करून ज्ञ = २ } प्रालंबांतील

त्याजकरितां . य = ५ - ज्ञ

म्हणजे . . . य = ५ - २ = ३

आणि . . . क्ष = ९ - य - ज्ञ

म्हणजे . . . क्ष = ९ - ३ - २ = ४

उत्तर, क्ष = ४, य = ३, ज्ञ = २ पूर्वदोन उन्नयनराबर आहे.

दुसरें, $\left\{ \begin{array}{l} क्ष + य + ज्ञ = १० \\ क्ष + ३य + २ज्ञ = ३० \\ क्ष + \frac{३}{२}य + \frac{३}{२}ज्ञ = १० \end{array} \right\}$ त्या तीन समीकरणां-

त क्ष, य, ज्ञ त्यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष=४, य=५, ज्ञ=८.

$$\text{तिसरें, } \left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} + \frac{1}{2} \text{य} + \frac{1}{3} \text{ज्ञ} = २७ \\ \text{क्ष} + \frac{1}{3} \text{य} + \frac{1}{4} \text{ज्ञ} = २० \\ \text{क्ष} + \frac{1}{4} \text{य} + \frac{1}{5} \text{ज्ञ} = १६ \end{array} \right\} \text{ त्या तीन समी}$$

करणांत क्ष, य, ज्ञ त्यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष=१, य=१२, ज्ञ=६०.

चवथें, क्ष-य=२ आणि क्ष-ज्ञ=३ आणि य+ज्ञ=९. त्या तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ त्यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष=७, य=५, ज्ञ=४.

$$\text{पांचवें, } \left\{ \begin{array}{l} २\text{क्ष} + ३\text{य} + ४\text{ज्ञ} = ७४ \\ ३\text{क्ष} + ४\text{य} + ५\text{ज्ञ} = ४६ \\ ४\text{क्ष} + ६\text{य} + ८\text{ज्ञ} = ६८ \end{array} \right\} \text{ त्या तीन समीक-}$$

रणांत क्ष, य, ज्ञ त्या तीन अव्यक्तपटांची किंमत काय?

प्रश्नसमुदाय.

प्रश्नसमुदाय म्हणजे कितीएक प्रश्न. ज्यांपासून एक वर्णसमीकरण उत्पन्न होतें.

प्रथम प्रश्न, दोन संख्या शोधायच्या, ज्या दोन सं-

ख्यांनी बेरीज १० होती, आणि वजाबाकी ६ होते.

आतां मोठी संख्या दाखवायाकरितां क्ष आणि लहान संख्या दाखवायाकरितां य घे.*

तर प्रथम संकेतापासून . $क्ष + य = १०$

दुसऱ्या पासून $क्ष - य = ६$

प्रतिसमीकरणांतील य यास स्थळांतरानें $क्ष = १० - य$ } त्यादोनकि
आणि $क्ष = ६ + य$ } मतीपरस्प

बरोबर करून, $६ + य = १० - य$

स्थळांतरानें, $२य = ४$

भागाकारानें, $य = \frac{४}{२} = २$

त्याज करितां, . $क्ष = ६ + य$

म्हणजे $क्ष = ६ + २ = ८$

उत्तर, ८ आणि २

दुसरा प्रश्न, समाजीक रूपये १००० आहेत ते अ व क त्या तीन जणांस वांटून द्यावे असें कीं अलाबपेक्षां

* त्या सर्व उदाहरणांत जितक्या अव्यक्तसंख्या आहेत, त्यांचे स्थळांतित कीं क्ष, य, ज्ञ इत्यादिक मूळ अक्षरलिपीचे शेवटील अक्षरें घेतात. तर यादून संक्षेप करून अव्यक्तसंख्यांचे प्रतिस्थळां वेगळालें अक्षरविन्ह न घेतां कार्य होईल परंतु शिकणारांस चांगला समज पडून पकें द्यावे म्हणून असें लिहिलें.

२०० अधिक आणि बला कपेशां १०० अधिक होतील.

क्ष = अचा भाग . य = बचा भाग . आणि झ = कचा भाग असें असो .

$$\text{आतां} \quad \text{क्ष} + \text{य} + \text{झ} = १०००$$

$$\text{क्ष} = \text{य} + २००$$

$$\text{य} = \text{झ} + १००$$

प्रथमसमीकरणांत क्षची किंमत य + २०० लिहिली तर त्या प्रथमसमीकरणानें रूप $२\text{य} + २०० + \text{झ} = १०००$ असें होईल.

नंतर त्यांत यची किंमत झ + १०० यचे स्थ० ३ झ + ४०० = १०००

स्थळांतरानें, ३ झ = १००० - ४०० = ६००

भागाकारानें, झ = $\frac{६००}{३} = २००$

$$\text{आतां} \quad \text{य} = \text{झ} + १००$$

$$\text{म्हणजे} \quad \text{य} = २०० + १०० = ३००$$

$$\text{आणि} \quad \text{क्ष} = \text{य} + २००$$

$$\text{म्हणजे} \quad \text{क्ष} = ३०० + २०० = ५००$$

उत्तर , अ ५०० , ब ३०० , क २०० .

तिसरा , ५००० रुपये २ असा मीस वांटून देणें आहेत, असे कीं, त्यांचे भाग परस्पर प्रमाणांत होतील . जसें, ७ : ८ तर प्रत्येकास काय काय भाग येईल ?

आतां क्ष आणि य हीं अक्षरविन्हें दोन अव्यक्त-
भाग दाखवायास घे .

तर प्रभाप्रमाणें ७ : ८ : : क्ष : य
त्यास समीकरणरूप देऊन ७ य = ८ क्ष
आणि क्ष + य = ५०००
दुसरे समीकरणांत यलासून • क्ष = ५००० - य ही क्षची किं
मत प्रथमांत क्षचे स्थळीं लिहून ७ य = ४०००० - ८ य
८ य त्यांस म्ळळांतर करून १५ य = ४००००
भागाकारणें य = $\frac{४००००}{१५}$ = २६६६ $\frac{२}{३}$
वरचें समीकरण क्ष = ५००० - य
त्यांत य ची किंमत लिहून . . . क्ष = ५००० - २६६६ $\frac{२}{३}$ = २३३३ $\frac{१}{३}$

उत्तर, क्षचा भाग २३३३ $\frac{१}{३}$ रुपये आणि यचा २६६६ $\frac{२}{३}$

चवथा, ती संख्या काय आहे कीं, जिचा चौथा भाग
पांचवे भागाहून १० त्यांनीं अधिक आहे .

इच्छिली अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षरविन्हें घे

आतां $\frac{१}{४}$ क्ष - $\frac{१}{५}$ क्ष = १०
प्रथमछेद ४ त्यांनीं गुणून क्ष - $\frac{४}{५}$ क्ष = ४०
दुसरे छेद ५ त्यांनीं गुणून ५ क्ष - ४ क्ष = २००
तर, क्ष = २०० इच्छिली

संख्या ही उत्तर .

पांचवा, ते अपूर्णांक काय आहेत? ज्यांचे अंशांत १ मिळविला असता त्यांची किंमत $\frac{1}{2}$ आणि छेदांत १ मिळविला तर त्यांची किंमत $\frac{1}{3}$ होते.

एथें अव्यक्त अपूर्णांक दाखवायाम $\frac{1}{2}$ हीं अक्षरचिन्हे घे.

तर प्रभाप्रमाणें $\frac{1x+1}{x} = \frac{1}{2}$

आणि $\frac{1x}{x+1} = \frac{1}{3}$

प्रथमांत x आणि २त्यांनी गुणून २ $1x + 2 = x$

दुसऱ्यांत $x+1$ आणि ३त्यांनी गुणून ३ $1x = x+1$

प्रथम दुसऱ्यांतून वजा करून $1x - 2 = 1$

स्थळांतरानें, $1x = 1 + 2 = 3$

आतां $x = 2 \cdot 1x + 0$

म्हणजे, $x = 6 + 2 = 8$

उत्तर, $\frac{3}{8}$ हे इच्छिते अपूर्णांक .

साहावा, एक बिगारी त्यानें ३० दिवस चाकरी कबूल केली, पुढील कराराप्रमाणें ज्या दिवशीं चांगलें काम करील त्या दिवसाचे पैसे २० आणि ज्या दिवशीं खेळेल किंवा गैरहजीर असेल त्या दिवसाचा उलटा इंड १० पैसे; पुढें ३० दिवस पुरे झाल्यानंतर कराराप्रमाणें त्याचे २४० पैसे

निघाले, तेव्हां खेळणे व गैरहजीरी त्यांत किती दिवस गेले ते सांग.

अव्यक्त कामाचे दिवसस्वळीं क्ष आणि खेळणे गैरहजीर त्या दिवसांचे स्वळीं य हीं दोन अक्षरचिन्हें घे.

आतां क्ष+य=३०

आणि २० क्ष-१० य=२४० } त्या दोहोंची
प्रथम समीकरण १० त्यांनीं गुणून १० क्ष+१० य=३००)

मिळवणी करून, १० क्ष=५४०

भागाकारानें क्ष= $\frac{५४०}{१०}$ = १८ ही क्षची

किंमत दुसरे समीकरणांत क्षचे स्वळीं लिहून य=३० - क्ष

म्हणजे य=३०-१८=१२

उत्तर, कामाचे दिवस १८ खेळ व गैरहजीरी दिवस १२

सातवा, एक पिंप पाण्यानें पूर्ण भरलें होतें. त्यांतून चतुर्थांश पाणी गळून गेलें आणि काहीं कार्यार्थ ३० मण पाणी काढिलें, नंतर त्या पिंपांत काठी उभी करून रुमार पाहतां अर्धें पिंप पाणी बाकी आहे. तेव्हां त्या सगळे पिंपांत किती मण पाणी राहिल तें सांग.

सगळे पिंपाचें पाणी अव्यक्त त्याचे स्वळीं क्ष मण घे
आतां ३० क्ष इतकें पाणी गळून गेलें त्या जक

रितां $\frac{2}{3}$ क्ष + ३० मण इतकें पाणी गेलें .

तेव्हां $\frac{1}{3}$ क्ष = $\frac{2}{3}$ क्ष + ३० मण

४ त्या छेदांनीं गुणून २ क्ष = क्ष + १२०

क्ष त्यास स्थळांतर करून क्ष = १२० मण हें उत्तर .

आठवा , २० त्या संख्येचे दोन भाग कर . ते अंश की , त्यांनील एके भागाची तिपट आणि दुसरे भागाची पांचपट त्यांची बेरीज ७६ होईल .

एथें दोन अव्यक्तभागांचे स्थळीं क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे .

आतां क्ष + य = २०

आणि ३क्ष + ५य = ७६ } त्या दोहोंची

प्रथम समीकरण ३त्यांनीं गुणून २ क्ष + ३य = ६०

वजाबाकी करून २ य = १६

भागाकारानें , य = $\frac{१६}{२}$ = ८

प्रथम समीकरण क्ष = २० - य त्यांत यची

किंमत य चे स्थळीं लिहून क्ष = २० - ८ = १२

उत्तर , १२ आणि ८

नववा , एके मनुष्यानिं १ पेशाचे २ प्रमाणें कांहीं आंबे खरेदी करून , पुनः तितकेच आंबे १ पेशाचे ३ प्रमाणें खरे-

दी किले . नंतर ते सर्व आंबे कांहीं नफा व्हावा त्या आशेनें २ पैशांचे ५ आंबे त्याप्रमाणें विकले नां शेवटीं त्यांत ३ पैसे तोटा आला तेव्हां ते सर्व आंबे किती होते ते मांग .

आंब्यांची संख्या प्रत्येक अव्यक्त ती दाखवायास क्ष अक्षर घे .

आतां , $\frac{1}{2}$ क्ष ही पहिले खरेदीची किंमत .
आणि $\frac{1}{3}$ क्ष ही दुसरे खरेदीची किंमत .

जर ५ आंबे : २ पैशास : : २ क्ष (सर्व आंबे) : $\frac{4}{5}$ क्ष
म्हणून ही दोन खरेद्यांची किंमत आहे . दर ५ आंबे २ पैशांस
तर प्रभाप्रमाणें $\frac{1}{2}$ क्ष + $\frac{1}{3}$ क्ष - $\frac{4}{5}$ क्ष = ३
प्रथम छेद २ त्यांनीं गुणून क्ष + $\frac{1}{3}$ क्ष - $\frac{4}{5}$ क्ष = ६
दुसरे छेद ३ त्यांनीं गुणून ३ क्ष + २ क्ष - $\frac{24}{5}$ क्ष = १०
तिसरे छेद ५ त्यांनीं गुणून १५ क्ष + १० क्ष - २४ क्ष = १०
म्हणजे क्ष = १० प्रति

खरेदीचे इतके आंबे हें उत्तर .

राहावा , अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळावयास
बसले , त्यांत अचे जबळ ८०० रुपये आणि बचे जबळ
६०० हे खेळाने आरंभी होते . पुढें खेळांत परस्परांची हार
जिंक बहुत वेळां होऊन शेवटास उठून गेले ते समयीं अ

चे जवळ रुपये वजवळ राहिल्याचे तिपट राहिले, तेव्हा
अ वजवळून किती रुपये जिंकला तें सांग .

एथें अचे जिंकीचे रुपये अव्यक्त त्यांचे खळीं क्ष अक्षर घे .

आतां ८००+क्षइतके अचे मुद्दल वजिंक

आणि ६००--क्षइतके वचे मुद्दल वहार .

तर प्रभाप्रमाणें ८००+क्ष=१८००--३ क्ष

८०० आणि ३ क्ष त्यांस खळींंतर करून ४ क्ष = १०००

भागाकारणें $क्ष = \frac{१०००}{४} = २५०$

इतके रुपये ब पासून अजिंकला हें उत्तर .

अकरावा , दोन संख्या काढ , अशा कीं , ज्यांची वजा-
बाकी ४ आणि ज्यांचे वर्गांची वजाबाकी ६४ होईल .

उत्तर , ६ आणि १०

बारावा , दोन संख्या काढ , अशाकीं , प्रथम संख्येचें
अर्ध आणि दुसरे संख्येचा एक तृतीयांश मिळून ९ आणि
प्रथम संख्येचा एक चतुर्थांश आणि दुसरे संख्येचा एक पंच-
मांश मिळून ५ होतील .

उत्तर , ८ आणि १५

तेरावा , २० त्या संख्येचे दोन भाग कर . असेकीं ,
एके भागाचा एक तृतीयांश आणि दुसरे भागाचा एक पंच-

मांश मिळून ६ होतील.

उत्तर, १५ आणि ५.

चौदावा, तीन संख्या काढ . अशा कीं, प्रथम आणि दुसरी त्यांची बेरीज ७ आणि प्रथम आणि तिसरी त्यांची बेरीज ८ आणि दुसरी आणि तिसरी त्यांची बेरीज ९ होतील .

उत्तर, ३ आणि ४ आणि ५ .

पंधरावा, कोणी एक गृहस्थ होता, त्याजवळ रुपये २०००० हजार होते, त्यास एक पुत्र आणि एक कन्या अशीं दोन अपत्ये होतीं पुढें तो मरण पावला . त्यानें पूर्वीच लिहून ठेविलें होतें कीं, पुत्रास १ रुपया १ पावला आणि कन्येस २ पावले त्याप्रमाणें वांटून द्यावे . तेव्हां ते रुपये त्याचे लेखाप्रमाणें वांटून देतां कोणास किती रुपये भाग आला तो प्रत्येकाचा सांग .

उत्तर, पुत्रास २०००० कन्येस ८०००

सोळावा, अ, ब, क त्या त्रिवर्गांनीं सर्कत केली, त्यांत सगळें भांडवल रुपये ४००० त्यांत बचे अचे दुपट आणि वर २०० आणि कचे अ आणि ब त्यांचे वेरिजे बराबर, तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग .

उत्तर, अचे ६०० बचे १४००, आणि कचे २०००
सत्रावा, कोणी एक मनुष्याने १००० रुपये कर्ज दे-
णें होतें, तें चुकवितेस मर्यां त्यानें कांहीं मोहारा व कांहीं
रुपये अशी खिचडी मिळून नग २०२ देऊन तें बराबर
चुकविलें, तेव्हां त्यांत मोहारा किती व रुपये किती तें
सांग .

उत्तर, ५७ मोहारा आणि १४५ रुपये.

अठरावा, अ आणि ब हे दोघे मित्र होते, त्यांत
अ बला सांगेकीं, तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मज ज-
वळ तुझे बाकीचे दुपट रुपये होतील, तमें ब अला सां-
गे कीं, तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मज जवळ तुझे बा-
कीचे तिपट रुपये होतील, तेव्हां एकेकाजवळ रुपये कि-
ती किती होते तें सांग .

उत्तर, अ २२ ब २६

एकुणिसावा, कोणी एक गृहस्थ कांहीं रुपये घेऊन
बाजारांत गेला, तेथें एके दुकांनीं सामानाबद्दल २ रुपये
खर्च करून पुढें चालला, नंतर जवळ रुपये अधिक
असावे म्हणून जे बाकी राहिले होते त्यांचे बराबर रुप-
ये दूसऱ्यापासून कर्ज घेतले, नंतर दुसऱ्या दुकांनीं गे-

ला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकी रुपयांच-
गबर पूर्ववत् कर्ज घेऊन तिसरे दुकांनीं गेला तेथें २ रुपये
खर्च करून पुनः जवळचे बाकीवराबर पूर्ववत् कर्ज घेऊ
न तेथे दुकांनीं गेला . तेथें २ रुपये खर्च केले तों जवळ
बाकी कांहीं नाहीं असें झालें . तेव्हां तो गृहस्थ मुळीं द्विती
रुपये घेऊन बाजारांत गेला तें सांग .

उत्तर, २ रुपये आणि ३ पादले .

विसावा, कोणी एक मनुष्य, त्याची स्त्री आणि पुत्र
त्यांसह वर्तमान प्रवासास गेला होता, तेथें मार्गी कोणाएकाचे
घरां तीं तिघें जणें भोजनास गेलीं . तेव्हां त्यानें भोजनसदर
सांगिला कीं, मुलास रुपया ३ आणि बायकोस मुलाबरोबर
आणि पुरुषाचा ५ अधिक आणि पुरुषास पुत्र आणि स्त्री त्यां
चे बरोबर इतके रुपये पडतील, असें वोलणें उरवून भो-
जन दिलें . पुढें त्यांनीं काय काय घावें तें सांग

उत्तर, बायकोस $\frac{१०}{३}$ पुरुषास $\frac{१०}{१}$.

एकविसावा, एक कोठार आहे त्यांत ६० खंडी धान्य
राहातें, त्यांत त्रैवटी डाळ त्या रीतीनें भरली होती . (त्रैवटी
म्हणजे चणे तुरी आणि उडीद त्यांच्या डाळी एकत्रमिश्रित)
उडदांची डाळ चण्याचे डाळी पेशां ६ खंडी अधिक, आणि

तुरींची डाळ उडदांची डाळ आणि चण्यांचे डाळीचा $\frac{1}{2}$ इतक्याचे बराबर होती. तेव्हां त्या तीन डाळी प्रत्येकीं किती किती खंडी होत्या तें सांग.

उत्तर, चण्यांची ^{खं.} १५ उडदांची ^{खं.} २१ तुरींची ^{खं.} २४

बाविसावा, कोणजे एके सरदारा जवळ फौज होती ती चौरस आकृति उभी केली तर २०४ मनुष्ये बाकी राहतात, आणि त्या चौरस आकृतीचे बाजूंस चौरस साधूनच एक मनुष्य वाढविलें तर २५ मनुष्ये कमी येतात. तेव्हां ती सर्व फौज किती होती सांग.

उत्तर, २४०००

तेविसावा, ती संख्या काय आहे कीं, जीस ३, ५, ८ हे पर्यायानें मिळविले असता तीन बेरजा भूमितिप्रमाणांत होतील.

उत्तर, ;

चाविसावा, कोणी तिघांजणांनीं सर्कती व्यापार केला, तेंथ मांडवलरुपये ७६०० त्यांत प्रथम आणि दुसरा यांचे भाग मिळून तिसऱ्यापेक्षां २४०० रुपये अधिक होतात. तसें दुसरा आणि तिसरा त्यांचे भाग मिळून प्रथमापेक्षां ७६०० रुपये अधिक होतात. तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग.

उत्तर, पहिल्याचे २००० दुसऱ्याचे ३००० तिसऱ्याचे २६००

पंचविसावा, त्या दोन संख्या कोणत्या आहेत की ज्या परस्परांस आहेत, जसें, ३ : ४ आणि त्यांचा गुणाकार त्यांचेच बेरिजेचे बारापट आहे .

उत्तर, २१, २८ .

सव्विसावा, किती एक मनुष्ये खाणावळ कबूल करून कोणाएकाचे घरीं जेवायास गेलीं होती. त्यांत ४ मनुष्ये अधिक असतीं तर सर्वोस प्रत्येकीं अर्ध अर्ध रुपया कमी पडता, आणि त्यांत ३ उणीं असतीं तर एकेकास अर्ध अर्ध रुपया अधिक पडता . तेव्हां सर्व मनुष्ये किती आणि प्रत्येकास किती किती रुपये पडले व सर्वमिळून किती रुपये तें सांग .

उत्तर, २४ मनुष्ये प्रत्येकास रुपये ३ ^{५०} आणि सर्व बेरीज रुपये ८४

सत्ताविसावा, कोणे एके शिलेदाराजवळ २ तट्टू आणि २ जीन होते . त्यांत एक जीन बहुमोल त्याची किंमत रुपये १०० आणि दुसरा जीन अल्पमोल त्याची किंमत रुपये ३० जेव्हां प्रथम तट्टूवर बहुमोल जीन आणि दुसरे तट्टूवर अल्पमोल जीन घालतो तेव्हां प्रथमाची किंमत दुसऱ्याचे दुपट होते . आणि जेव्हां प्रथमावर अल्पमोल जीन आणि दुसऱ्यावर बहुमोल जीन असें घालतो तेव्हां दुसऱ्याची किंम-

त प्रथमाचे तिपट होते . तेव्हां त्या दोन तट्टुंची जिनाबांचू न वेगळाली किंमत काय आहे ती सांग .

उत्तर, प्रथमाची ६० रुपये, दुसऱ्याची ९० रुपये .

अठ्ठाविसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत ज्याप रस्परांस आहेत जसें २:३ आणि त्या संख्यांत प्रत्येकीं ६ मिळविले असतां त्या दोन बेरजा परस्परांस होतील . जसें ४:५

उत्तर, ६ आणि ९

एकुणतिसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, ज्यांत मोठी लाहानीस आहे, जशी त्यांची बेरीज २० त्या संख्येस आहे आणि त्यांची वजाबाकी १० त्या संख्येस आहे .

उत्तर . १५ आणि ४५

तिसावा, त्या दोन संख्या काय आहेत ? ज्यांची वजाबाकी, बेरिज, आणि गुणाकार त्यास होतें जशी २ ही संख्या ३ आणि ५ त्यांस आहे .

उत्तर, २ आणि १०

एकतिसावा, गणितश्रेढीच्या त्या तीन संख्या काय आहेत? ज्यांत प्रथम तिसरीस आहे . जसें ५: ९ आणि त्या तिहींची बेरीज ६३ होतील .

उत्तर, १५, २१ आणि २७

वैतिसावा, २४ त्या संख्येचे दोन भाग कर असे
कीं, मोठा भाग लाहान भागानें भागिला आणि लाहान भा-
ग मोठे भागानें भागिला तर ते दोन भागाकार परस्परांस
होतील . जसे ४ : १

उत्तर १६ आणि ८

वैतिसावा, दोन गृहस्थ परस्पर अनेक गोष्टी
बोलत होते, त्यांत एकांनं दुसऱ्यास विचारिलें कीं, तुहांम
पुत्र २ त्यांचीं वयें काय आहेत ? तेव्हां त्यांनं सांगितलें जे
त्या दोन पुत्रांचे वयांचे बेरीजेंत १० मिळविले असतां व-
डील पुत्रांचे वयांचे दुपट होतात, आणि दोघांचे वयांचे
वजाबाकींत ६ वजा केले तर धाकट्यांचे वयाबरोबर हो-
तात .

उत्तर, १० आणि १२ वर्षें .

वैतिसावा, त्या चार संख्या काय आहेत ? ज्यांत
प्रथम आणि दुसरी आणि तिसरी त्यांची बेरीज १२ होतील
आणि प्रथम दुसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज १५ होतील
तसें प्रथम तिसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज १०, तसें
दुसरी तिसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज २० होतील .

उत्तर, २, ४, ७ आणि ९.

पस्तिमावा, ४० त्या संख्येचे चार भाग कर असे कीं, प्रथमांत ३ मिळविले ती बेरीज, दुसऱ्यांतून ३ वजा केलें ती बाकी, तिसरा तिहींनीं गुणिला तो गुणाकार, आणि चवथा तिहींनीं भागिला तो भागाकार, हे सर्व परस्प-
र बराबर होतील.

उत्तर, ६, १२, ३, आणि २७

कृत्तिमावा, कोष्ठीएक फडिया सावकार आंबेमोहोर आणि पटण त्या दोन जातींचे तांदूळ १०० मण एकत्र करून विकायास इच्छितो, त्यांत आंबेमोहोर २ रुपये मण आणि पटण १ रुपया २ पावल्यांनीं मण पडले; आणि हालीं सकटभाव १ रुपया २ पावले ९० रेसांनीं मण असा आहे तेव्हां त्यांनीं कोणते जातीचे किती किती मण एकत्र मिळवून १०० मण करावे, म्हणजे पडले भावांत तोटा नयेईल तें माग.

उत्तर, आंबेमोहोर २५ मण, पटण ७५ मण.

वर्गसमीकरण .

वर्गसमीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे .

एकाकी वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदाचा वर्ग मात्र येतो . जसें $अक्ष^२=ब$ आणि त्या जातीचे वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची रीति पृथ्वीं एकवर्णसमीकरणांत सांगितली आहे .

संयुक्तवर्गसमीकरण तेंच होय, ज्याचे एक पदांत अव्यक्तपदाचा वर्ग येतो ; आणि दुसरे पदांत त्याच अव्यक्तपदाचा प्रथम घात येतो . जसें $अक्ष^२+बक्ष=क$.

सर्व संयुक्त वर्गसमीकरणांचीं पूर्वीं सांगितले रीती करून पृथक्करणं केल्यानंतर तीं समीकरणं सुटील तीन सारणीकोष्टकांतून एक कोष्टकाचे रूपाचीं होतील . जें रूप अव्यक्तपदाची किंमत काढायाकरितां त्यास दिलें पाहिजे .

$$१ \text{ क्ष}^२+अक्ष=ब$$

$$२ \text{ क्ष}^२-अक्ष=ब$$

$$३ \text{ क्ष}^२-अक्ष=-ब$$

वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची सामान्य रीति पुढें सांगितों त्या प्रमाणें आहे , ज्यास वर्गपूरणीकरण म्हणतात .

१ सांगितले वर्गसमीकरणास पूर्वरीतीनें सरळ करावें. असें कीं, वरचे तीन कोष्टकांतून एक कोष्टकासारखें स्वर होईल. त्याची रीति, पदांस स्वर्यांतर करावें. असें कीं, अव्यक्तपदे समीकरणाचे एक बाजूस होतील, आणि व्यक्तपदे दुसरे बाजूस आणि ज्यांत वर्ग आहे तें पद प्रथम स्वर्यां, तमें ज्यांत प्रथम घात आहे तें पद दुसरे स्वर्यां, त्या प्रमाणें करावें. नंतर अव्यक्तवर्गपदांस अंक अथवा अक्षरचिन्ह वेळापकाशक असेल तर त्यानें समीकरणाचीं सर्व पदे भागावीं. आणि जर तें अव्यक्त वर्गपद ऋण (-) असेल तर त्यास समीकरणाचे सर्व पदांची धन (+) ऋण (-) चिन्हे बदल करावीं. कारण, अव्यक्तवर्गपद धन (+) असल्यावांचून पृथक्करण होत नाही. तेव्हां समीकरणाचें पृथक्करण वर्ग पुरा केल्यानें होतें. त्यारीतीनें.

२ वर्गसमीकरणाचे अव्यक्त बाजूचा पुरा वर्ग करावा, त्या रीतीनें दुसरे पदाचे वेळापकाशकाचें अर्ध घेऊन त्याचा वर्ग करावा. आणि हा वर्गसमीकरणाचे दोन बाजूंस मिळवावा. तेव्हां समीकरणाचे ज्या बाजूंत अव्यक्तपद आहे त्या बाजूचा पुरा वर्ग होईल.

३ नंतर समीकरणाचे दोन बाजूंचें वर्गमूळ काढावें,

म्हणजे अव्यक्तपदाची किंमत प्रकट होईल. समीकरणाची व्यक्त बाजू धन किंवा ऋण (\pm) अशी करावी म्हणजे समीकरणाची दोन मुळे निघतील अथवा अव्यक्तपदाच्या दोन किंमती निघतील.*

* कोणतेही पदांचे वर्गमूळ धन+किंवा- ऋण असेल या जकरिता सर्व वर्गसमीकरणांचे पृथक्करण दोन प्रकारचे होते. जसें + नै यांचे वर्गमूळ + न किंवा - न आहे. कारण + न x + न आणि - न x - न हे दोनही + न होतात, परंतु - न अथवा - न नै हे सर्व मिथ्या भासवतू किंवा अशक्य कारण, + न किंवा - न या दोहोचाही वर्ग - नै होत नाही.

जसें प्रथम सारणीकोष्टकांत $\text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{ब}$ यांतून निघते की, $\text{क्ष} + \frac{\text{ब}}{\text{अ}} = \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ म्हणजे हे मूळ $\sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ अथवा $\sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ असेल कारण यांतून कोणतेही एकांचे त्यांचे तेच गुणिले असता $\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}$ हा वर्ग होतो. या जकरिता या प्रमाणे मुळांत भ्रम राहतो तो दखवा या जकरिता मुळांचे मागे \pm हीं दोन चिन्हे लिहितान. जसें $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$.

या सारणी कोष्टकांत $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ अथवा $\text{क्ष} = + \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ अशी सर्वदा धन + आहे. कारण $\frac{\text{ब}}{\text{अ}} + \text{ब}$ हे $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ याहून अधिक आहे. तेव्हां मोठे वर्गांचे निश्चयें मोठे मूळ असावे. या जकरिता $\sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ हे वर्गमूळ सर्वदा $\sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ अ म्हणजे $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ याहून मोठे आहे. या जकरिता $\pm \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ हे सर्वदा धन + होईल.

दुसरी किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ अहें सर्वदा ऋण - होईल. कारण, यांची दोनही पदे ऋण - आहेत. या जकरिता जेव्हां $\text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{ब}$. तेव्हां क्ष ची धन + किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = + \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$

१ टीप . समीकरणाचे प्रथम बाजूचें मूळ सर्वदा बरा-
बर आहे जें प्रथमपदाचें मूळ दुसरे पदाचे बेळप्रकाश
काचे अर्धानें युक्त दुसरें पद + किंवा ऋण - असेल तशा
चिन्हांनें ही .

२ सर्व समीकरणें ज्यांत अव्यक्तपदांचीं दोन पदें येता-
त आणि प्रथमपदाचा घातप्रकाशक दुसरे पदाचे घातप्र-
काशकाचे दुपट आहे . तेव्हां त्याचें पृथक्करण पूर्वप्रमाणें
वर्गसमीकरणरीतीनें च वर्ग पुरा केल्यानें होतें .

आणि क्षची ऋण - किंमत म्हणजे क्ष = $-\sqrt{ब + \frac{३}{२}अ} - \frac{३}{२}अ$.

दुसरे सारणीकोष्टकांत म्हणजे क्ष = $\pm \sqrt{ब + \frac{३}{२}अ} + \frac{३}{२}अ$. यांत क्षची
प्रथम किंमत म्हणजे क्ष = $+\sqrt{ब + \frac{३}{२}अ} + \frac{३}{२}अ$ ही सर्वदा धन आहे . कार-
ण दोनही पदें धन + आहेत . परंतु दुसरी किंमत म्हणजे क्ष = $-\sqrt{ब + \frac{३}{२}अ} + \frac{३}{२}अ$ ही सर्वदा ऋण - होईल . कारण ब + $\frac{३}{२}अ$ हें $\frac{३}{२}अ$
याहून अधिक आहे . या जकरितां $\sqrt{ब + \frac{३}{२}अ}$ हें $\sqrt{\frac{३}{२}अ}$ म्हणजे $\frac{३}{२}अ$ या
हून मोठें आहे . म्हणून $-\sqrt{ब + \frac{३}{२}अ} + \frac{३}{२}अ$ हें सर्वदा ऋण आहे .

याजकरितां जेव्हां क्ष = अक्ष = ब तेव्हां क्षची धन + किंमत म्हणजे
क्ष = $+\sqrt{ब + \frac{३}{२}अ} + \frac{३}{२}अ$ आणि क्षची ऋण - किंमत म्हणजे
क्ष = $-\sqrt{ब + \frac{३}{२}अ} + \frac{३}{२}अ$

यापासून कळते कीं , दोन प्रथमसारणीकोष्टकांत सर्वदा अव्यक्तप-
दाच्या दोन किंमती निघतात . त्यांत एक धन + आणि दुसरी ऋण - आहे .

जसें $\text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{ब}$ अथवा $\text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{व}$ किंवा
 $\text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{ब}$ हीं सर्व समीकरणसारणी आहेत. आणि
 त्यांचें पृथक्करण त्या वर्गपृथक्करणप्रमाणें होतें.

परंतु तिसरे सारणीकोष्टकांत जेव्हां $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ + अ त्यांत क्षच्या
 दोन किंमती घन होतील. जेव्हां अ हा बहुत अधिक आहे. आतां क्ष
 ची प्रथम किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = + \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ + अ ही घन होईल. कारण
 दोनही पदे घन आहेत.

दुसरी किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = - \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ + अ हीही घन आहे. का-
 रण अ हे अ - ब याहून अधिक आहे. याजकरितां $\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ म्हणजे
 अ हे $\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ याहून अधिक आहे. म्हणून $-\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ + अ हे
 सर्वदा घन + होईल. अशापासून जेव्हां $\text{क्ष} - \text{अक्ष} = -\text{ब}$ तेव्हां क्षची
 प्रथम किंमत $\text{क्ष} = + \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ + अ आणि दुसरी म्हणजे $\text{क्ष} = -$
 $\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ + अ या दोनही किंमती घन आहेत.

परंतु या तिसरे सारणीकोष्टकांत जर वची किंमत $\sqrt{\text{अ}}$ याहून अ-
 धिक असेल तर अशे प्रश्नांचें पृथक्करण करायास अशक्य आहे. कारण,
 कोणतेंही पद घन + किंवा - कृण असे परंतु त्याचा वर्ग सर्वदा घन आहे.
 याजकरितां कृणपदाचें वर्गमूळ अशक्य. आणि जेव्हां व हा $\sqrt{\text{अ}}$ या
 हून अधिक आहे तेव्हां $\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ हे कृणपद होईल. आणि याजकरितां
 त्याचें वर्गमूळ म्हणजे $\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ हा मिथ्याभास किंवा अशक्य आहे.
 याजकरितां याप्रकारांत $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ब}}$ म्हणजे क्षच्या दोन किं-
 मती अशक्य किंवा मिथ्याभासपदे आहेत.

उदाहरणें.

पहिलें, $क्ष^३ + ४ क्ष = ६०$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $क्ष^३ + ४ क्ष = ६०$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^३ + ४ क्ष + ४ = ६० + ४ = ६४$

नंतर मूळ काढून $क्ष + २ = \pm ८$

२त्यांस स्थळांतर करून . . . $क्ष = ६$ किंवा -१० हीं दोन मुळां हें उत्तर .

दुसरें, $क्ष^३ - ६ क्ष + १० = ६५$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $क्ष^३ - ६ क्ष + १० = ६५$

१०त्यांस स्थळांतर करून . $क्ष^३ - ६ क्ष = ५५$

वर्ग पुरा करून $क्ष^३ - ६ क्ष + ९ = ६४$

नंतर मूळ काढून $क्ष - ३ = \pm ८$

पुनः ३त्यांस स्थळांतर करून $क्ष = ११$ किंवा -५ हें उत्तर .

तिसरें, $२ क्ष^३ + ८ क्ष - ३० = ६०$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $२ क्ष^३ + ८ क्ष - ३० = ६०$

१० त्यांस स्त्रळ्यांतर करून $२ \text{ क्ष} + ८ \text{ क्ष} = ९०$

२ त्यांनीं भागून $\text{क्ष} + ४ \text{ क्ष} = ४५$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^२ + ४ \text{ क्ष} + ४ = ४९$

नंतर मूळ काढून $\text{क्ष} + २ = \pm ७$

पुनः २ त्यांस स्त्रळ्यांतर करून $\text{क्ष} = ५$ किंवा -९ हें उत्तर.

चवथें, $३ \text{ क्ष}^२ - ३ \text{ क्ष} + ९ = ८$ हे त्या वर्गसमीकरणं
गांठील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $३ \text{ क्ष}^२ - ३ \text{ क्ष} + ९ = ८$ हे

३ त्यांनीं भागून $\text{क्ष}^२ - \text{क्ष} + ३ = २\frac{२}{३}$

३ त्यांस स्त्रळ्यांतर करून $\text{क्ष}^२ - \text{क्ष} = -\frac{२}{३}$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^२ - \text{क्ष} + \frac{१}{४} = \frac{२५}{३६}$

नंतर मूळ काढून $\text{क्ष} - \frac{१}{४} = \pm \frac{५}{६}$

पुनः $\frac{३}{४}$ त्यांस स्त्रळ्यांतर करून $\text{क्ष} = \frac{३}{४}$ किंवा $-\frac{३}{४}$ हें उत्तर.

पांचवें, $\frac{३}{४} \text{ क्ष}^२ - \frac{३}{४} \text{ क्ष} + ३०\frac{३}{४} = ५२\frac{३}{४}$ त्या वर्गसमीकरणं
करणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $\frac{३}{४} \text{ क्ष}^२ - \frac{३}{४} \text{ क्ष} + ३०\frac{३}{४} = ५२\frac{३}{४}$

$३०\frac{३}{४}$ त्यांस स्त्रळ्यांतर करून $\frac{३}{४} \text{ क्ष}^२ - \frac{३}{४} \text{ क्ष} = २२\frac{३}{४}$

२ त्यांनीं गुणून $\text{क्ष}^२ - \text{क्ष} = ४४\frac{३}{४}$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^२ - \text{क्ष} + \frac{१}{४} = ४४\frac{३}{४}$

मूळ काढून

$$x^2 - c = \pm \sqrt{c}$$

पुनः c त्यास स्थळांतर करून $x^2 = c$ किंवा $-c$ हे उत्तर.

साहाये, $x^2 - b^2 = c$ त्या वर्गसमीकरणातील

x अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आता $x^2 - b^2 = c$

अ त्याने भागून $x^2 - \frac{b^2}{a} x = \frac{c}{a}$

वर्ग पुरा करून $x^2 - \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

नंतर मूळ काढून $x - \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}}$

$\frac{b}{2a}$ त्यास स्थळांतर करून $x = \pm \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}} + \frac{b}{2a}$ हे उत्तर

साहाये, $x^2 - 2ax = b$ त्या वर्गसमीकरणातील

x अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आता $x^2 - 2ax = b$

वर्ग पुरा करून $x^2 - 2ax + a^2 = a^2 + b$

मूळ काढून $x - a = \pm \sqrt{a^2 + b}$

अ त्यास स्थळांतर करून $x^2 = \pm \sqrt{a^2 + b} + a$

नंतर वर्गमूळ काढून $x = \pm \sqrt{a^2 + b} + a$

त्या रीतीने सर्वदा असे कामाचे शब्द प्रत्येक रेखांस लिहून शिकणारे बांगले समजदार होऊन पुढील उदा

हरणाचीं पृथक्करणं लोकर करितील असें त्यास शिकवा
वें .

आठवें, $६२-६२-७=३३$ त्या वर्गसमीकरणां-
तील ६२ अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $६२=१०$

नववें, $९२-९२-१०=१४$ त्या वर्गसमीकरणां
तील ९२ अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर. $९२=८$

दाहावें, $५२+४२-९०=११४$ त्या वर्गसमीकरणां
तील ५२ अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $५२=६$

अकरावें, $३२-३२+२=९$ त्या वर्गसमीकर
णांतील ३२ अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $३२=४$

बारावें, $३२-३२=४०$ त्या वर्गसमीकरणांतील
 ३२ अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर $३२=०$

तेरावें, $३२-३२-१२=१३$ त्या वर्गसमीकरणांती
ल ३२ अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $\text{क्ष} = ९$

चौदावें, $\frac{३}{३} \text{क्ष} + \frac{३}{३} \text{क्ष} = \frac{३}{३}$ त्या वर्गसमीकरणा-
तील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $\text{क्ष} = ७२७७६६$

पंधरावें, $\text{क्ष}^२ + ४ \text{क्ष} = १२$ त्या वर्गसमीकरणातील
 क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $\text{क्ष} = २२ = १०२५९९.२१$

सोळावें, $\text{क्ष}^२ + ४ \text{क्ष} = \text{अ}^२ + २$ त्या वर्गसमीकरणां
तील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $\text{क्ष} = \sqrt{\text{अ}^२ + ६} - २$

प्रश्न

ज्यां पासून वर्गसमीकरणे उतसन्न होतात

पहिलें, त्या दोन संख्या काढ, ज्यांची वजाबा-
की २ आणि ज्यांचा गुणाकार ८० होतो.

इच्छित्या अव्यक्त २ संख्या दाखवायास क्ष आणि य
ही दोन अक्षरनिर्देश घे*.

* या प्रश्नांत जसें एक वर्णसमीकरणें आहे कीं, जितकीं अव्यक्त

| | |
|--|------------|
| आतां प्रथमसंकेताप्रमाणे | क्ष-य=२ |
| दुसऱ्याप्रमाणे | क्षय = ८० |
| प्रथमांतील य त्यास स्खळांतर करून | क्ष=य+२ |
| क्षची किंमत दुसऱ्यांत लिहून | य+२ य = ८० |
| वर्ग पुरा करून | य+२ य+१=८१ |
| मूळ काढून | य+१=९ |
| १ त्यांस स्खळांतर करून | य=८ |
| वरप्रमाणे क्षची किंमत | क्ष=य+२=१० |

उत्तर, १० आणि ८

दुसरा, १४ त्या संख्येचे दोन भाग कर . असे की, त्यांचा गुणाकार ४८ होईल .

दोन अव्यक्त भाग दाखवायाम क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हे घे .

| | |
|------------------------------------|-----------|
| आतां प्रथम संकेताप्रमाणे | क्ष+य=१४ |
| आणि दुसरे संकेताप्रमाणे | क्षय = ४८ |

परें आहेत, तितकीं अक्षरचिन्हे घेतात . पृथक्करण करायाम तसेंच आहे, परंतु याहून संक्षेपरीति आहे पण अभ्यास करण्यास आरंभी ती उपयोगी नव्हे . कारण प्रथमच कठीण लागलें तर पुढें समज होणें दुर्घट

प्रथमसमीकरणांतील y त्यास स्थळां० $x=14$ -यही x ची किंमत
दुसरे समीकरणांतील x चे स्थळांलिहून $14y - y^2 = 40$ वर्ग धन क-
रायाकरितां सर्व चिन्हे बदल करून $y^2 - 14y = -40$
नंतर वर्ग पुरा करून . . . $y^2 - 14y + 49 = 9$
वर्गमूळ काढून . . . $y - 7 = \pm 3$
७ त्यास स्थळांतर करून $y = 0$ आणि 10 हे इच्छिले दोन
भाग हें उत्तर .

तिसरा , ज्या दोन संख्यांची बेरीज 9 होते, आणि
ज्यांचे वर्गांची बेरीज 49 , त्या दोन संख्या काय आहेत ?

त्या दोन अव्यक्त संख्या दाखवायास x आणि y हीं
अक्षरें घे.

आतां प्रथमसंकेताप्रमाणें . . . $x + y = 9$

आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . . . $x^2 + y^2 = 49$

प्रथमसमीकरणांतील y त्यास स्थळांत० $x=9-y$ ही x ची किंमत

दुसरे समीकरणांत लिहून $(9-y)^2 + y^2 = 49$

81 त्यास स्थळांतर करून . . . $2y^2 - 18y = -36$

2 त्यांनीं भागून . . . $y^2 - 9y = -18$

नंतर वर्ग पुरा करून $y^2 - 9y + \frac{81}{4} = \frac{36}{4}$

वर्गमूळ काढून $y - \frac{9}{2} = \pm \frac{3}{2}$

आतां $\frac{१}{२}$ त्यांस स्थळांतर करून $य = \pm \frac{३}{२} + \frac{१}{२} = ६$ आणि ३
 त्या इच्छित्या दोन संख्या हें उत्तर.

चवथा, त्या दोन संख्या काय आहेत ज्यांची बेरीज
 गुणाकार आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी ही ती
 नाही बराबर आहेत.

अव्यक्त दोन संख्या दाखवायास १५ आणि ५ हीं दोन
 अक्षरें घे.

प्रथम आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . . . $१५ + ५ = २०$

तिसरे आणि तिसरे संकेताप्रमाणें . . . $१५ + ५ = १५^२ - ५^२$

दुसऱ्याच्या दोन बाजू $१५ + ५$ त्यांनीं भागून . . . $१ = १५ - ५$

य त्यास स्थळांतर करून $य + १ = १५$ ही १५ ची किंमत

प्रथम समीकरणांत १५ चे स्थळीं लिहून $२५ + १ = ५^२ + ५$

२५ त्यांस स्थळांतर करून . . . $१ = ५^२ - ५$

वर्ग पुरा करून . . . $\frac{१}{४} = ५^२ - ५ + \frac{१}{४}$

मूळ काढून . . . $\frac{१}{२} \sqrt{५} = ५ - \frac{१}{२}$

$\frac{१}{२}$ त्यास स्थळांतर करून . . . $\frac{१}{२} \sqrt{५} + \frac{१}{२} = ५$

आणि वरचे समीकरणाप्रमाणें $१५ = \frac{१}{२} \sqrt{५} + \frac{१}{२}$

त्या कौशळांतील $\frac{१}{२} \sqrt{५}$ त्याची किंमत दशांशांत काढून $१५ = +$
 २६१८० इत्यादिक निघेल, आणि $य = + १६१८०$ इत्यादिक

पांचवा, गणितश्रेणींत त्या चार संख्या काय आहेत. कीं, ज्यांचे दोन शेषांचा गुणाकार २२ आहे, आणि दोन मध्यपदांचा गुणाकार ४० होतो.

अति लहान अव्यक्तपद दाखवायास क्ष अक्षर घे आणि अव्यक्त उत्तर दाखवायास य अक्षर घे.

तर क्ष, क्ष+य, क्ष+२य, क्ष+३य, हीं चार पदे त्या अव्यक्त चार संख्या दाखवितात.

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें क्ष^३+३क्षय=२२

दुसरे संकेताप्रमाणें क्ष^३+३क्षय+२य^२=४०

दुसऱ्यांतून प्रथम वजा करून २य^२=१८

२ त्यांनीं भागून य^२=९

वर्गमूळ काढून य=३ हें उत्तर आहे.

य ची किंमत प्रथमांत लिहून क्ष^३+९क्ष=२२

वर्गपुरा करून क्ष^३+९क्ष+ $\frac{81}{4}$ = $\frac{169}{4}$

मूळ काढून क्ष+ $\frac{3}{2}$ = $\frac{13}{2}$

$\frac{3}{2}$ त्यास स्थळांतर करून क्ष=२ हें अतिला-

हान पद त्याजकरितां २, ५, ८, ११ त्या इच्छित्या

चार संख्या हें उत्तर.

साहावा, भूमितिश्रेणींत त्या तीन संख्या काय

आहेत. कीं, ज्यांची बेरीज ७ होते आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज २१ होते.

अव्यक्त तीन संख्या दाखवायास क्ष य आणि ज्ञ हीं तीन अक्षरं घे.

आतां प्रथम संकेताप्रमाणे . . . क्ष ज्ञ = य

आणि दुसरे संकेताप्रमाणे . . . क्ष + य + ज्ञ = ७

आणि तिसरे संकेताप्रमाणे . . . क्ष^२ + य^२ + ज्ञ^२ = २१

दुसऱ्यांतील य त्यास स्थळांतर करून क्ष + ज्ञ = ७ य त्याच समीकरणांत

दोनही बाजूंचे वर्ग करून क्ष^२ + २ क्ष ज्ञ + ज्ञ^२ = ४९ - १४ य + य^२

२ क्ष ज्ञ त्यांचे स्थळांतर प्रथमांतील क्ष ज्ञ

त्यांची किंमत य^२ ती लिहून क्ष^२ + २ य^२ + ज्ञ^२ = ४९ - १४ य + य^२

दोन बाजूंचे य^२ वजा करून क्ष^२ + य^२ + ज्ञ^२ = ४९ - १४ य

आतां क्ष^२ + य^२ + ज्ञ^२ त्याच्या दोन (२१ = ४९ - १४ य

किमतींची बराबरी करून]

२१ आणि १४ य० त्यास स्थळांतर करून १४ य = २०

१४ त्यांनीं भागून . . . य = २ हे दुसरें पद ही

य ची किंमत प्रथमांत लिहून . . . क्ष ज्ञ = ४

चौथ्या समीकरणांतील लिहून . . . क्ष + ज्ञ = ५ त्या दोघटील

समीकरणांतील ज्ञ त्यास स्थळांतर करून क्ष = ५ - ज्ञ ही क्षची किं-

मनत्याशेवटिलाचे वरचे समीकरणांत लिहून . $५.३ - ३ = ४$
 वर्गधन करावयास सर्व चिन्हे बदल करून . $३ - ५.३ = -४$
 वर्ग पुग करून . $३ - ५.३ + \frac{२५}{४} = \frac{२५}{४}$
 मूळ काढून . $३ - \frac{५}{२} = \pm \frac{३}{२}$
 $\frac{५}{२}$ त्यांस स्वळांतर करून . $३ = ४$ अथवा १ ही क्षत्री किंमत
 त्याजकरितां $१, २, ४$ त्या इच्छित्या तीन संख्या
 हे उभार .

वर्गसमीकरणाचे दुसरे प्रश्न .

पूर्वी सांगितले की, अव्यक्त पदं आहेत तितकी अक्षर
 चिन्हे घ्यावी म्हणून . परंतु त्याशिवाय दुसरी रीति आहे तिची
 उदाहरणं लिहितां .

उदाहरणं .

पाहिले, दोन संख्या काढ अशाकीं, त्यांची वजाबाकी
 ८ आणि त्यांचा गुणाकार २४० होईल .

आतां लाहान अव्यक्त संख्या दाखवायास क्षअक्षर घे .

तर

$$३ + ८ = \text{माठी संख्या}$$

आणि प्रश्नाप्रमाणं $३(३ + ८)$ म्हणजे $३ + ८ = ३४०$

वर्ग पुरा करून $११ + ८ = १९ + १६ = ३५$

वर्गमूळ काढून $११ + ४ = १५$

त्यास स्थळांतर करून . . . $११ = १२$ ही लाहान संख्या

तेव्हां $११ + ८ = १२ + ८ = २०$ ही मोठी संख्या हें उत्तर .

दुसरा, ६० त्या संख्येचे दोन भाग कर . असे की,

यांचा गुणाकार ८६४ होईल .

आतां मोठा अव्यक्त भाग दाखवायाम ११ अक्षर घे .

तर $६० - ११ =$ लाहान भाग

आणि प्रभाप्रमाणे $११(६० - ११)$ म्हणजे $६० \times ११ - ११^२ = ८६४$

दोन बाजूंचीं सर्व चिन्हे बदल करून $११^२ - ६० = - ८६४$

वर्ग पुरा करून $११^२ - ६० \times ११ + १०० = ३६$

वर्गमूळ काढून $११ - ३० = \pm ६$

३० त्यास स्थळांतर करून $११ = \pm ६ + ३०$

त्याजकरितां $११ = ६ + ३० = ३६$ अथवा $३० - ६ = २४$ म्ह-

णजे ३६ आणि २४ हे दोन इच्छिते भाग हें उत्तर .

तिसरा, दोन संख्या असाव्या, त्या अशाकीं त्यांची बेरीज १० (अ) असेल, आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज ५०

(ब) असेल,

आतां मोठी संख्या दाखवायाम ११ अक्षर घे .

तर अ-क्ष = लाहान संख्या .

आणि प्रश्नाप्रमाणे $क्ष^2 + (अ-क्ष)$ म्हणजे $२क्ष^2 - २अक्ष + अ^2 = ब$

आतां $अ^2$ त्यास स्वळांतर करून $२क्ष^2 - २अक्ष = ब - अ^2$

२ त्यांनी भागून $क्ष - अक्ष = \frac{ब-अ^2}{२}$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^2 - अक्ष + \frac{अ^2}{४} = \frac{अ^2}{४} + \frac{ब-अ^2}{२}$

वर्गमूळ काढून . . . $क्ष - \frac{अ}{२} = \pm \sqrt{\frac{अ^2}{४} + \frac{ब-अ^2}{२}} = \pm \frac{३}{२} \sqrt{२ब-अ^2}$

$\frac{अ}{२}$ त्यास स्वळांतर करून $क्ष = \frac{अ}{२} \pm \frac{३}{२} \sqrt{२ब-अ^2}$

अचे स्वळां १० आणि बचे स्थळां ५८ ही त्यांची किंमत लिहून .

$क्ष = \frac{१०}{२} + \frac{३}{२} \sqrt{११६ - १००} = ५ + २ = ७$ ही मोठी संख्या .

तेव्हां $१० - क्ष = \frac{१०}{२} - \frac{३}{२} \sqrt{११६ - १००} = ५ - २ = ३$ ही लाहान संख्या .

चौथा , एक तागा २४ रुपयांस विकला , त्यांत जशी १०० रुपयांस मूळ किंमत तशाप्रमाणानें मूळ किमतीस नफा , तेव्हां मूळ किंमत काय ती सांग .

आतां मूळ किंमत अव्यक्त , ती दाखवायास $क्ष$ अक्षर घे

तर $२४ - क्ष =$ सर्व नफा .

प्रश्नाप्रमाणे . . . $१०० : क्ष :: क्ष : २४ - क्ष$.

तर $क्ष^2 = १००(२४ - क्ष) = २४०० - १०० क्ष$

$१०० क्ष$ त्यास स्वळांतर करून $क्ष^2 + १०० क्ष = २४००$

वर्ग पुरा करून . . $१९ + १०० १९ + २५०० = २४०० + २५०० = ४९००$

वर्गमूळ काढून . . $१९ + ५० = \sqrt{४९००} = ७०$

५० त्यांस स्तब्धांतर करून $१९ = ७० - ५० = २०$ मूळ किंमत, हें उत्तर.

पांचवा, एके मेंढक्यानें ८० रुपयांस कांहीं मेंढे विकत घेतले, त्यांत चार मेंढे अधिक आले असते तर दर मेंढ्यास एकेक रुपया कमी पडता, तेव्हां सर्व मेंढे किती घेतले ते सांग .

अव्यक्त मेंढ्यांची संख्या दाखवायास १९ अक्षर घे.
तर . . . $\frac{८०}{१९}$ हें एकेकाचें माल होईल.

आणि जर $१९ + ४$ मेंढे ८० रुपयांस येते तर प्रत्येकाचें माल $\frac{८०}{१९+४}$

प्रभा प्रमाणें . . . $\frac{८०}{१९} = \frac{८०}{१९+४} + १$

१९नें गुणून . . . $८० = \frac{८० १९}{१९+४} + १९$

$१९ + ४$ त्यांनीं गुणून $८० १९ + ३२० = ८० १९ + १९ + ४ १९$.

$८० १९$ दोन बाजूंतून टाकून $१९ + ४ १९ = ३२०$

वर्ग पुरा करून . . . $१९ + ४ १९ + ४ = ३२४$

वर्गमूळ काढून . . . $१९ + २ = १८$

२ त्यांस स्तब्धांतर करून $१९ = १८ - २ = १६$ मेंढ्यांची संख्या हें उत्तर.

साहावा, दोन संख्या काढ, अशाकीं, त्यांची बेरीज

१७ (अ) आणि त्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ४७२१ (ब) होई ल .

अव्यक्त दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवायास क्ष अक्षर घे .

तर $\frac{३}{२}अ + \frac{३}{२}क्ष$ म्हणजे $\frac{अ+क्ष}{२}$ ही मोठी संख्या .

आणि $\frac{३}{२}अ - \frac{३}{२}क्ष$ म्हणजे $\frac{अ-क्ष}{२}$ ही लहान संख्या आहे

आतां प्रभाप्रमाणे $\frac{(अ+क्ष)^२}{१६} + \frac{(अ-क्ष)^२}{१६} = ब$

१६ त्यांनीं गुणून $(अ+क्ष)^२ + (अ-क्ष)^२ = १६ब$

घात करून त्यांची बेरीज $२अ^२ + १२अक्ष + २क्ष^२ = १६ब$

स्थ० आणि दोन त्यांनीं भागून $क्ष^२ + ६अक्ष = ८ब - अ^२$

वर्ग पुरा करून $क्ष^२ + ६अक्ष + ९अ^२ = ८ब + ८अ^२ = ८(ब+अ^२)$

मूळ काढून $क्ष + ३अ = \sqrt{८(ब+अ^२)}$

$३अ$ त्यांस स्थळांतर करून $क्ष = \sqrt{८(ब+अ^२)} - ३अ$

पुनः वर्गमूळ काढून $क्ष = \sqrt{८(ब+अ^२)} - ३अ$

आतां त्यांत अची किंमत १२ आणि बची ४७२१ ही लि

हून $क्ष = \sqrt{८(४७२१ + २८५६९)} - ५०७$

$$= \sqrt{५१६ - ५०७}$$

$$= १९$$

$= १९$ ही क्षची किंमत म्हणजे दोन संख्यांची वजा बा-

की तर $\frac{अ+क्ष}{२} = \frac{१३+३}{२} = \frac{१६}{२} = ८$ ही मोठी संख्या .

आणि $\frac{अ-क्ष}{२} = \frac{१३-३}{२} = \frac{१०}{२} = ५$ ही लाहान संख्या
त्यांची बेरीज $८+५=१३$ आणि $८-५=३$ हे उत्तर .

सातवा , ती संख्या काय आहे . की , जिचा वर्ग आणि ती संख्या मिळून ४२ होताने .

उत्तर , ६

आठवा , दोन संख्या काढ अशा की , त्यांतील लाहान संख्या मोठे संख्येस होईल . जशी मोठी संख्या बारांस होईल . आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ होते .

उत्तर , ३ आणि ६

नववा , त्या दोन संख्या काय आहेत , की ज्यांची वजाबाकी २ आहे , आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ९८ आहे .

उत्तर , ३ आणि ५

दाहावा , त्या दोन संख्या काय आहेत . की , ज्यांची बेरीज ६ होते , आणि ज्यांचे घनांची बेरीज १२ होणे .

उत्तर , २ आणि ४

अकरावा , त्या दोन संख्या काय आहेत , की ज्यांचा गुणाकार २० आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ६१ आहे .

उत्तर . ४ आणि ५.

वागवा, ११ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं त्या दोन भागांचे वर्गांचा गुणाकार ७८४ होईल.

उत्तर . ४ आणि ७

नेरावा . ५ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं, ते दोन भाग परस्परांने वेगळाले भागिले असतां त्या दोन भागाकारांची बेरीज ४८ होईल.

उत्तर , १ आणि ४

चौदावा . १२ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं, त्यांचा गुणाकार त्यांचे वजावटीने आठपट होईल.

उत्तर , ४ आणि ८

पंधरावा , १० त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं लाहान भागांचे चौपटीचा वर्ग मोठे भागांचे दुपटीचे वर्गाहून ११२ त्यांनी अधिक होईल

उत्तर , ४ आणि ६

सोळावा , त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ८९ आणि ज्यांची बेरीज त्यांनील मोठे संख्येने गुणिली असतां १०४ होतान .

उत्तर , ५ आणि ८

त क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = १०२०४७२४

राहावे, $२क्ष^२ - १५क्ष + ४०क्ष^३ - ३०क्ष = -१$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = १२०४७२४

अकरावे, $क्ष^२ + २क्ष^३ + ३क्ष^४ + ४क्ष^५ + ५क्ष = ५४३२९$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = ०४१४४५५

बारावे, $क्ष^३ = १२३४५६७८९$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = ०६४००२६६

तेरावे, $२क्ष^२ - ७क्ष + ११क्ष^३ - ३क्ष = ११$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

चौदावे, $(३क्ष^३ - २\sqrt{क्ष + १})^२ - (क्ष^३ - ४क्ष\sqrt{क्ष + ३\sqrt{क्ष}})^२ = ५६$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष = १०३६००७७

घनसमीकरण पृथक्करण करा याची कार्डानाची

रीति.

इष्टराशिसाधनाचे साहाय्याने घनादिसमीकरणाचें मूळसंख्येंत काढायास पूर्व मामान्यरीति फार उपयोगी आणि सोपी आहे; परंतु घनसमीकरणाचेंच मूळ काढायास कार्डानानें विशेष रीति दुसरी केली आहे, ती त्या स्त्रुब्धीं लिहितों. कारण, कदाचित् कोणी त्या रीतीवरून काम करायास इळील तरी चिंता नाही.

त्या रीतीनें पृथक्करण करणें तर घनसमीकरणास अगत्य जें रूप पाहिजे तें हें होय. म्हणजे, $इ * अ इ = ब$ म्हणजे दुसरें पद किंवा दुसरें घाताचें पद त्यांत नसावें त्याजकरितां कोणतेही घनसमीकरणास त्याचें रूप दिल्या नंतर जसें $क्ष + पक्ष + कक्ष = र$, म्हणजे ज्याचे प्रथम पदास वेळाप्रकाशक नाही असें. तर दुसरें पद पक्ष हें तेथून घालविलें पाहिजे. त्याची रीति $इ प$ अथवा दुसरें पदाचे वेळाप्रकाशकाचा $इ$ घेऊन त्यास चिन्ह बदल करावें आणि कोणतेही दुसरे अव्यक्ताशी जोडावें. जसें $इ$, तर त्याप्रमाणें होईल. $इ - इ प$ नंतर सांगितले समीकरणांत अव्यक्त क्षचे स्त्रुब्धी ठेवावें. म्हणजे एक नवें त्यापुढील सं-

क्षेपरूपांचं समीकरण उसन्न होईल . इ^३* अज्ञ=ब हे
रूप कार्डानाचे रीतीने पृथक्करण करायास अगत्य पाहिजे,
आतां त्यांत क = $\frac{३}{२}$ अ आणि ड = $\frac{३}{२}$ ब असे असनील तर
संक्षेपसमीकरणास हे पूर्वीचे रूप होईल . इ^३* ३क इ =
२ड .

नंतर क आणि ड त्यांच्या दोन किमती त्या पुढील
सारणीकोष्टकांत ठेवाव्या .

$$\left. \begin{aligned} \text{इ} &= \sqrt{\text{ड} + 1(\text{ड} + \text{क}^2)} + \sqrt{\text{ड} - 1(\text{ड} + \text{क}^2)} \\ \text{अथवा} & \quad \frac{\text{क}}{\text{ड} + 1(\text{ड} + \text{क}^2)} \\ \text{इ} &= \sqrt{\text{ड} + 1(\text{ड} + \text{क}^2)} - \sqrt{\text{ड} - 1(\text{ड} + \text{क}^2)} \end{aligned} \right\} *$$

*. मनांत आणकी, कोणतेही मूळ दोन भागांचे आहे . म्हणजे क्ष
आणि य . आतां क्ष + य = इ ही वेरीज सांगितले समीकरणांत इचे स्थळीं
ठेवावी म्हणजे त्यांचे हे रूप होईल .

$$\text{क्ष} + \text{य} = ३ \text{क्षय} (\text{क्ष} + \text{य}) + \text{अ} (\text{क्ष} + \text{य}) = \text{ब}$$

पुनः मनांत आणकी, ३क्षय = -अ . आतां पूर्वसमीकरणांत ३क्षय
यांचे स्थळीं -अ ठेविल्याने त्या समीकरणांचे हे रूप होईल . क्ष + य = ब
आतां या समीकरणाचे वर्गांतून हे समीकरण म्हणजे क्षय = - $\frac{३}{२}$ अ याची
चौपट वजा करेली म्हणजे ही बाकी राहाने . क्ष - ३क्षय + य = ब + $\frac{३}{२}$ अ
नंतर याचे वर्गमूळ हे आहे . क्ष - य = $\sqrt{\text{ब} + \frac{३}{२} \text{अ}}$ हे समीकरण क्ष + य = ब
या पूर्वसमीकरणांत मिळवून आणि परस्पराने वजाबाकी करून ही दोन स
मीकरणे उसन्न होतात .

म्हणजे झ मुळाची किंमत झ * अझ = ब त्या संक्षेप समीकरणांत निघेल . शेवटी क्ष = झ - ३ प पे . तर ही क्षची किंमत २३ + पक्ष + कक्ष = र त्या समीकरणांत इच्छितें मूळ होईल .

त्याप्रमाणें सांगितले समीकरणांभे एक मूळ निघाल्यानंतर सांगितलें समीकरण पूर्वरीतीनें एक घात कमी करून वर्गसमीकरण उत्पन्न होईल . त्याचे वर्गपूरणरीतीनें राहिलीं दोन मुळे उत्पन्न होतील .

टीप . जेव्हां अ किंवा क हा वेळाप्रकाशक रूप

$$\left. \begin{aligned} \{ २क्ष^२ = ब + \sqrt{ब^२ + ३अ^३} = ब + २\sqrt{(\frac{३}{२}ब)^२ + (\frac{३}{२}अ)^३} \} \\ \{ २य^२ = ब - \sqrt{ब^२ + ३अ^३} = ब + २\sqrt{(\frac{३}{२}ब)^२ + (\frac{३}{२}अ)^३} \} \end{aligned} \right\} \text{ अथवा}$$

$$\left. \begin{aligned} \{ २क्ष^२ = २ड + २\sqrt{ड^३ + क^३} \} \\ \{ २य^२ = २ड - २\sqrt{ड^३ + क^३} \} \end{aligned} \right\} \text{ २ दोन यांनीं भागून घनमूळ घेऊन}$$

$$\left. \begin{aligned} \{ क्ष = \sqrt{ड + \sqrt{ड^३ + क^३}} \} \\ \{ य = \sqrt{ड - \sqrt{ड^३ + क^३}} \} \end{aligned} \right\} \text{ त्या दोहांची बेरीज वरचे सारणीकोष्टक}$$

आहेत . म्हणजे झची किंमत .

आतां वरचे समीकरणांनील दोन दुसरीं पदे समलेख केल्यापासून कळतें कीं, दुसरे सारणीकोष्टक प्रथम सारणीकोष्टकाचे किमती बराबर आहेत .

आहे . आणि को घन डु वर्गाहून अधिक आहे तर हा प्रकार मूळ काढायस प्रायशः अशक्त आहे .

उदाहरण , $१३^३ - ६१३^३ + १०१३ = ०$ त्या समीकरणाची वेगळालीं मुळे काय आहेत ?

प्रथम , दुसरें पद घालवावयाकरितां त्याचा वेळा-प्रकाशक-६ आहे . त्याचा तृतीय भाग-२ आहे . त्याजकरितां $१३ = ३ + २$ हे घे . तर

$$\begin{aligned} १३^३ &= ३^३ + ६३^३ + १२३ + ० \\ - ६१३^३ &= - ६३^३ - २४३ - २४ \\ + १०१३ &= + १०३ + २० \\ \hline १३^३ * & - २३ + ४ = ० \\ \text{अथवा } ३^३ * & - २३ = ४ \end{aligned}$$

त्यांत अ = -२ आणि ब = ४ त्याजकरितां क = -३ आणि ड = २ त्याजकरितां

$$\begin{aligned} \sqrt{ड + १(डकक)} &= \sqrt{२ + १(४ - ३)} = \sqrt{२ + १\frac{१००}{१००}} = \sqrt{२ + १\frac{१०}{१०}} = १.५७७३५ \\ \text{आणि } \sqrt{ड - १(डकक)} &= \sqrt{२ - १(४ - ३)} = \sqrt{२ - १\frac{१००}{१००}} = \sqrt{२ - १\frac{१०}{१०}} = ०.४२२६५ \end{aligned}$$

नंतर त्या दोहोंची बेरीज ३ची किंमत आहे . म्हणजे $३ = २$ त्याजकरितां $१३ = ३ + २ = ४$ हें $१३^३ - ६१३^३ + १०१३ = ०$ त्या समीकरणांत १३ चें मूळ आहे .

दुसरीं दोन मुळें काढायाकरितां २७९ वे पृष्ठावरील रीती
नें भागाकार करावा जसें,

$$\text{क्ष}-४) \text{क्ष}^३-६\text{क्ष}^२+१०\text{क्ष}-८ \text{ (क्ष}^३-२\text{क्ष}+२=०$$

$$\underline{\text{क्ष}^३-४\text{क्ष}^२}$$

$$* -२\text{क्ष}^२+१०\text{क्ष}$$

$$\underline{-२\text{क्ष}^२+८\text{क्ष}}$$

$$* +२\text{क्ष}-८$$

$$+२\text{क्ष}-८$$

$$* \quad *$$

आतां स्त्रळांतरानें $\text{क्ष}^३-२\text{क्ष} = -२$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^३-२\text{क्ष}+१ = -१$

मूळ काढून $\text{क्ष}-१ = \pm \sqrt{-१}$

स्त्रळांतरानें $\text{क्ष} = १ \pm \sqrt{-१}$

म्हणजे $\text{क्ष} = १ + \sqrt{-१}$ आणि $\text{क्ष} = १ - \sqrt{-१}$ हीं क्ष चीं इच्छिलीं
दोन मुळें होत.

दुसरें, $\text{क्ष}^३-९\text{क्ष}^२+२०\text{क्ष} = ३०$ त्या समीकरणांत वेग
जालीं मुळें काय आहेत?

उत्तर, $\text{क्ष} = ३$ अथवा $= ३ + \sqrt{-१}$ अथवा $= ३ - \sqrt{-१}$

तिसरें, $\text{क्ष}^३-१०\text{क्ष}^२+१४\text{क्ष} = २०$ त्या समीकरणांत वेग

ळालीं मुळें काय आहेत ?

उत्तर, $क्ष=९$ अथवा $=१+४-३$ अथवा $=१-४-३$

सरळव्याज.

कोणतेही मुदलाचें कितीही मुदतीनें व्याज मुद्दल आणि मुदती त्यांशीं समप्रमाणांत आहे. त्याजकरितां एक वर्षाचें एक रुपयाचें व्याज कोणतेही मुद्दल आणि त्याच्या मुदती वर्ष आणि वर्षाचे अवयव हीं तीन परस्पर गुणून तो गुणाकार त्या मुदलाचें त्या मुदतीचें व्याज होईल. म्हणजे जर,

र = एक रुपयाचे एक वर्षाचे व्याजाचा दर असेल.

प = मुद्दल कर्ज असेल.

त = मुदतीची संख्या असेल.

अ = व्याज मुद्दल म्हणजे व्याज आणि मुद्दल मिळून राशि असेल.

परत = पचें त मुदतीचे व्याज होईल. त्याजकरितां $प + परत$ अथवा $प \times (१ + रत) = अ$ ही व्याजमुद्दल राशि.

त्या समीकरणापासून दुसरें समीकरण अल्यायासें उ
त्पन्न होतें , ज्यापासून दुसरें पदांच्या किमती समजांत येती-
ल . आणि पुढें सांगतो त्याप्रमाणें त्यांस एकत्र करितो .

प्रथम , $अ = प + परत$ हें व्याजमुद्दल .

दुसरें , $प = \frac{अ}{१+रत}$ हें मुद्दल .

तिसरें , $र = \frac{अ-प}{पत}$ हा व्याजाचा दर .

चौथें , $त = \frac{अ-प}{पर}$ त्या मुदती .

उदाहरण , कोणतेही सरळ व्याजाचे दगनें कोणतें
ही मुद्दल दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या ?

त्या उदाहरणांत प्रथम समीकरण कामांत घेतलें पाहि-
जे . म्हणजे , $अ = प + परत$ त्यांत $अ = २प$ म्हणजे ,
मुदलाची दुपट अचे स्थळीं ठेविली पाहिजे . तर $२प = प +$
 $परत$. अथवा , $परत = प$. अथवा , $रत = १$ त्याजकरितां $त =$
 $\frac{१}{र}$.

त्यांत $र$ हें एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज आहे . त्या-
जकरितां सरळ व्याजानें मुद्दल दुपट होण्यास $त$ मुदती भा-
गाकार आहे . जे कोणतेंही मुद्दल त्याचे एक वर्षाचे व्याजा
नें भागिलें तो भागाकार मुदतीभागाकार होय . अशांनं १००
रुपयांस १ वर्षाचें व्याज ५ रुपये असेल , तर मुद्दल दुपट हो-

ण्यास $\frac{१००}{१०} = २०$ वर्षे असावी. अथवा चौथे समीकरण पासून मुदती सत्वर कळतील. $t = \frac{अ-प}{वर} = \frac{१५-५}{१०} = \frac{१०}{१०} = १$ हे पूर्णप्रमाणे बराबर आहे.

चक्रवाढव्याज .

जां पदे सरळव्याजांत येतात. म्हणजे,

प = मुद्दल .

र = एक रुपयाचा एक वर्षाचे व्याजाचा दर

अ = व्याजमुद्दल रास .

त = मुदती .

त्याशिवाय चक्रवाढव्याजांत दुसरें एक पद येतें . म्हणजे व्याजाचे दराचें गुणोत्तर . तें हें आहे कीं , एक रुपयाचें एक मुदतीचें व्याजमुद्दल . हें मुद्दल दाखवायाकरितां च अक्षरचिन्ह घ्यावें . म्हणजे, च = १ + र . हें एक रुपयाचें एक मुदतीचें व्याजमुद्दल दाखवितें . तेव्हां वेगळाले मुदतीचें व्याजमुद्दल त्वारीतीनें तपशील करितां कळतें . जसें ,

१ रुपया कोणतेही मुदतीचे व्याजमुद्दलास आहे, तसें

कोणतेही सांगितले मुद्दल - त्या मुदतीचे त्याचे व्याजमुद्दलास होईल. म्हणजे,

जसे १ रुपयाः चः : पः पच. हे एक वर्षाचे व्याज मुद्दल आहे. आणि १ रुपयाः चः : पचः पच. हे दुसरे वर्षाचे व्याजमुद्दल आहे.

तसे १ रुपयाः चः : पचः पच. हे तिसरे वर्षाचे व्याजमुद्दल आहे.

आणि इत्यादि .

व्याजकरिता सामान्यतः पच^त = अ. हे व्याजमुद्दल त मुदतीचे आहे. त्या समीकरणापासून हे सामान्य समीकरण उत्पन्न होते.

प्रथम, अ = पच^त हे व्याजमुद्दल

दुसरे, प = $\frac{अ}{च}$ हे मुद्दल .

तिसरे, च = $\frac{अ}{प}$ हे गुणोत्तर .

चवथे, त = $\frac{ला \cdot अ - ला \cdot प}{ला \cdot च}$

त्यापासून कोणतेही एक पद निघेल, जर राहिली तीन पदे सांगितली आहेत .

जेव्हा सगळे व्याजच करायाची इच्छा आहे, तेव्हा अ

त्या व्याजमुदलापासून प हें मुद्दल मात्र वजा करावें. म्हणजे बाकी राहिली तें व्याज .

उदाहरण , कोणतें ही मुद्दल सांगितलें . चक्रवाढव्याजाचे दरानें दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या ? तर हें समजायाकरितां चवथें समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे परंतु त्या प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें $A=२$ प तेव्हां त्याप्रमाणें तपशील होईल .

$$t = \frac{\text{ला०अ-ला०प}}{\text{ला०च}} = \frac{\text{ला०२५-ला०५}}{\text{ला०च}} = \frac{\text{ला०२०}}{\text{ला०च}}$$

अशांनं जर एक वर्षांत १०० रुपयांस व्याजाचा दर ५ रुपये असेल, तर $च = १ + ०.५ = १.०५$ त्याजकरितां .

$$t = \frac{\text{ला०२०}}{\text{ला०१.०५}} = \frac{३०१०३०}{०.२११८२} = १४.२०६७ \text{ हें जवळजवळ .}$$

म्हणजे, कोणतें ही मुद्दल १४.२०६७ वर्षांत दुपट होतें, दरवर्षीक डादरवर्षास पंचोत्रा व्याज चक्रवाढीनें असेल तर .

त्या प्रश्नापासून आणि सरळ व्याजांत त्यासारखे प्रश्न आहेत, त्यांपासून वेगळालें मुद्दल दुपट होण्यास सरळ व्याजांनं आणि चक्रवाढव्याजांनं किती किती मुदती असाव्या तें कळायस कोष्टक लिहितों

| दर | | सरळव्याज | चक्रवाढव्याज |
|-----|----------------------|----------|--------------|
| २ | | ५० | ३५.००२८ |
| २ ३ | शंभरांस एकवर्षास | ४० | २८.०७०१ |
| ३ | त्या दराचे व्याजांने | ३३ ३ | २३.४४९८ |
| ३ ३ | एक रुपया किंवा दुसरे | २८ ३ | २०.१४८८ |
| ४ | कोणतेही मुद्दल दुपट | २५ | १७.६९३० |
| ४ ३ | होईल. त्या पुढील को | २२ ३ | १५.७४७५ |
| ५ | एकांत सांगितले वर्षा | २० १/१० | १४.२०६७ |
| ६ | नीं किंवा मुदतीनीं | १६ ३ | ११.८९५७ |
| ७ | | १४ ३ | १०.२४४८ |
| ८ | | १२ ३ | ९.००६५ |
| ९ | | ११ ३ | ८.०४३२ |
| १० | | १० | ७.२७२५ |

त्या पुढील कोष्टकांचे साहाय्याने वेगळाले दरांनी वेगळाले
मुदतीचे चक्रवाढव्याजाचा हिसाब करायाम फार सगम पडेल . .

एकरूपयाचें व्याजमुद्दल कितीही वर्षांचे संख्येनें

| वर्षे | ३ | ३ ३ | ४ | ४ ३ | ५ | ६ |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| १ | १.०३०० | १.०३५० | १.०४०० | १.०४५० | १.०५०० | १.०६०० |
| २ | १.०६०९ | १.०७१२ | १.०८१६ | १.०९२० | १.१०२५ | १.१२६६ |
| ३ | १.०९२७ | १.१०८७ | १.१२४९ | १.१४१२ | १.१५७६ | १.१९१० |
| ४ | १.१२५५ | १.१४७५ | १.१६९९ | १.१९२५ | १.२१५५ | १.२६२५ |
| ५ | १.१५९३ | १.१८७७ | १.२१६७ | १.२४६२ | १.२७६३ | १.३३६२ |
| ६ | १.१९४१ | १.२२९३ | १.२६५३ | १.३०२३ | १.३४०१ | १.४१४५ |
| ७ | १.२२९९ | १.२७२३ | १.३१५९ | १.३६०९ | १.४०७१ | १.५०३६ |
| ८ | १.२६६८ | १.३१६८ | १.३६६६ | १.४२२१ | १.४७७५ | १.५९३९ |
| ९ | १.३०४८ | १.३६२९ | १.४२३३ | १.४८६१ | १.५५१३ | १.६८९५ |
| १० | १.३४३९ | १.४१०६ | १.४८०२ | १.५५३० | १.६२८९ | १.७९०९ |
| ११ | १.३८४२ | १.४६०० | १.५८९५ | १.६२२९ | १.७१०३ | १.८९८३ |
| १२ | १.४२५८ | १.५१११ | १.६०१० | १.६९५९ | १.७९५९ | २.०१२२ |
| १३ | १.४६८५ | १.५६४० | १.६६५१ | १.७७२२ | १.८८५६ | २.१३२९ |
| १४ | १.५१२६ | १.६१८७ | १.७३१७ | १.८५१९ | १.९७९९ | २.२६०९ |
| १५ | १.५५८० | १.६७५३ | १.८००९ | १.९३५३ | २.०७८९ | २.३९६६ |
| १६ | १.६०४७ | १.७३४० | १.८७३० | २.०२२४ | २.१८२९ | २.५४०४ |
| १७ | १.६५२८ | १.७९४७ | १.९४७९ | २.११३४ | २.२९२० | २.६९२८ |
| १८ | १.७०२४ | १.८५७५ | २.०२५८ | २.२०८५ | २.४०६६ | २.८५४३ |
| १९ | १.७५३५ | १.९२२५ | २.१०६८ | २.३०७९ | २.५२७० | ३.०२५६ |
| २० | १.८०६१ | १.९८९८ | २.१९११ | २.४११७ | २.६५३३ | ३.२०७१ |

त्या कोष्टकांत सगळे घात म्हणजे चर्च घात विसावे घातापर्यंत लिहिले आहेत. किंवा एक रुपयाचें व्याजमुद्दल त्यांचें काम हें आहे. कीं, काणतेही मुदलाचें व्याज किंवा व्याजमुद्दल कोणतेही मुदतीचें करायाचें, जी मुदत वीस वर्षांचे आंत आहे.

उदाहरण, ५२३० रुपये मुद्दल त्यास दरसाल दरशें कडा ५ रुपये व्याजप्रमाणें १५ वर्षांत चक्रवादीनें व्याजमुद्दल रास किती होईल ?

कोष्टकांत १५ चे ओळींत ५ त्यांचें दराखालीं एक रुपयाचें व्याजमुद्दल लिहिलें आहे. तें २०७८९ त्यास सांगितले मुद्दलानें गुणून.

$$\begin{array}{r}
 5230 \\
 \hline
 623670 \\
 895360 \\
 903984 \\
 \hline
 906726870
 \end{array}$$

हे व्याजमुद्दलरुपये रास

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 \hline
 215680
 \end{array}$$

किंवा रु० १०८७२ . . . पा० २ . . . ५८ हे व्याजमुद्दल .

५२७०

५६४२ . . . २ . . . ५८ हें व्याज

प्रथमटीप जेव्हां व्याजाचा दर वर्षाचे कांहीं भागावर आहे जसें, अर्धवर्ष, पाववर्ष, इत्यादि . तेव्हां पण हीच रीति लागते, परंतु असें आहे . तर त त्या मुदती दाखवितो . आणि च तितक्या मुदतीचें व्याजमुद्दल .

दुसरीटीप . जेव्हां कोणतेही मुदलाचे चक्रवादीनें व्याज किंवा मुद्दल करायाची इच्छा आहे तेव्हां तें त्या पुढील रीतीवरून करावें .

प्रथमरीति . जेव्हां मुदत एक वर्षाचा कोणताही बराबर भाग आहे . पूर्वरीतीनें एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल काढवें . नंतर ती मुदत वर्षाचा कितवा भाग आहे , तो अंक त्यास मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें . म्हणजे त्या मुदतीचें एक रुपयाचें व्याजमुद्दल झालें . त्यास सांगितले मुदलांनें गुणावें , म्हणजे इच्छिलेल्या मुदतीचें व्याजमुद्दल झालें .

दुसरीरीति . जेव्हां मुदत वर्षाचा कोणताही बराबर भाग नाही , तेव्हां सांगितले मुदतीचे दिवस करावे आणि एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याजमुद्दल आहे , त्यास ३६५ हा अंक

मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें. तें मूळ एक रुपयाचें एक दिवसाचें व्याजमुद्दल झालें. पण तें सांगितले मुदतीचें दिवस संख्या घातपर्यंत वाढवावें. म्हणजे एक रुपयाचें तितके दिवसांचें व्याजमुद्दल झालें. नंतर त्यास सांगितले मुदलानें गुणावें; तो गुणाकार इच्छिलें व्याजमुद्दल होईल. त्या कामाचा तपशील करितेसमयीं लागरतंम बहुत उपयोगी पडेल.

प्राप्ति .

प्राप्तिशब्द कामांत घेतात. ऐसाजे, जो पैक्याचा लाभ बराबर मुदतीवर होतो. जसा कर्जाचें व्याज, घर भूमि इत्यादिकांचें भाडें, चाकरीचें वेतन, वर्षासन, आणि वाळपर्वेशी इत्यादि. हे सर्व लाभ मुदतीचे मुदतीस पावतात. परंतु बहुत करून वर्षाचे मुदतीवर आहेत. त्या सर्व लाभांस प्राप्ति असें म्हणतात.

प्राप्ति दोन प्रकारची आहे. वर्तमान आणि भविष्य. वर्तमान प्राप्ति म्हणजे जो पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला आहे ती होय. भविष्यप्राप्ति म्हणजे पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला नाही, परंतु काहीं मुदतीनें किंवा काहीं प्रतिबंध असेल तो दूर

ज्ञात्यावर निश्चित हातीं येणार .

जेव्हां प्राप्ति कितीएक वर्षे अवरुद्ध आहे , म्हणून पैका पावला नाही तीस अवरुद्ध प्राप्ति म्हणतात .

प्राप्तीचे भेद दोन आहेत . सावधि आणि निरवधि . सावधि प्राप्ति म्हणजे ज्या प्राप्तीस कालमर्यादा आहे . ५ वर्षे , १० वर्षे इत्यादि . निरवधि प्राप्ति म्हणजे ज्या प्राप्तीस काळमर्यादा नाही . अखंड चालणारी .

प्राप्तीचें व्याजमुद्दल म्हणजे अवरुद्धप्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें व्याज आणि मुद्दल त्यांची बेरीज .

प्राप्तीची वर्तमानकिंमत म्हणजे प्राप्तीचा आधार मनांत धरून जो पैका एकाएकीं देण्यास घेण्यास योग्य आहे तो होय .

अ = प्राप्ति .

न = अवरुद्धप्राप्तीची वर्षसंख्या .

च = एकरूपयाचें एकवर्षाचें व्याजमुद्दल .

म = प्राप्तीचें व्याजमुद्दल .

व = प्राप्तीची वर्तमानकिंमत .

अशां अक्षराविन्हे .

आतां च राशीची वर्तमान किंमत १ आहे . त्याजकरितां प्रमाणानें कोणतीही दुसरी राशि . जसा अ त्याची किंमत निघेल .

जसे चः १ : अः $\frac{अ}{३}$ ही अची वर्तमान किंमत जी एक वर्षानंतर मिळेल
 आणि चः १ : अः $\frac{अ}{३}$ ही अची वर्तमान किंमत जी दोन वर्षानंतर मिळेल
 तसे त्याप्रमाणे पुढे ही $\frac{अ}{३}, \frac{अ}{३}, \frac{अ}{३},$ इत्यादि. त्या
 सर्व अच्या वर्तमान किंमती ३, ४, ५ इत्यादि वर्षानंतर
 मिळतील त्या जकरिता त्या सर्वांची बेरीज.

म्हणजे $\frac{अ}{३} + \frac{अ}{३} + \frac{अ}{३} + \frac{अ}{३} + \frac{अ}{३}$ इत्यादि.

किंवा $(३ + ३ + ३ + ३ + ३) \times अ$ ही बेरीज न
 पदापर्यंत न वर्षसंख्येचे प्राप्तीची वर्तमान किंमत होईल.
 आणि निरवधिप्राप्तीची किंमत त्या श्रेणीची अनंतपदेपर्यंत
 बेरीज आहे. परंतु सत्वर दिसते की ही श्रेणी भूमितिप्रमा-
 णांत आहे. जिचे प्रथम पद ३ गुणोत्तर ३ आणि गळ न
 आहे. त्या जकरिता त्या श्रेणीचे सर्वधन किंवा वर्तमान किंमत

$$व = \frac{३ - ३ \times ३^n}{१ - ३} \times अ = \frac{३^n - १}{३ - १} \times \frac{अ}{३}$$

जेव्हा प्राप्ति निरवधि आहे. तेव्हा न गळ अनंत आहे
 आणि ३^n हाही अनंत आहे. त्या जकरिता हे पद $३^n = ०$ शून्य
 होते. त्यास्तव $\frac{अ}{३} \times ३^n$ हे ही $= ०$ आहे. त्यापासून कळते की
 पूर्वसमीकरणस हे रूप होते, $व = \frac{अ}{३}$, म्हणजे कोणतीही प्रा
 मि एक रुपयाचे एकवर्षाचे व्याजाने भागून तो भागाकार नि

रवधिप्राप्तीची किंमत होतो .

अज्ञानें जर व्याजाचा दर शंभरांस पांचोत्रा असेल तर $१००\text{अ} \div ५ = २०\text{अ}$ हा निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ५ रुपये व्याजाचे दरानें आहे, आणि $१००\text{अ} \div ४ = २५\text{अ}$ ही निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ४ रुपये व्याजाच्या दरानें आहे आणि $१००\text{अ} \div ३ = ३३\frac{१}{३}\text{अ}$ ही निरवधिप्राप्तीची किंमत ३ रुपये व्याजाचे दरानें आहे . इत्यादि .

पुनः एक रुपयाचें न वर्षांत व्याजमुद्दल = v^n आहे . त्याजकरितां $v^n - १$ ही त्या मुदलावर वृद्धि झाली . परंतु त्याचें एक वर्षाचें व्याज किंवा प्राप्ति जी त्या वृद्धीवर आहे . म्हणजे $v - १$ त्याजकरितां .

जसें $v - १ : v^n - १ :: \text{अ} : \text{म. म्हणजे} .$

$\text{म} = \frac{v^n - १}{v - १} \times \text{अ}$ आतां अवरुद्धप्राप्तीस जे वेगळालें प्रकार लागतात , ते त्या पूर्वसमीकरणापासून निघतील .

$$\text{म} = \frac{v^n - १}{v - १} \times \text{अ} = v v^n$$

$$v = \frac{v^n - १}{v - १} \times \frac{\text{अ}}{v^n} = \frac{\text{म}}{v^n}$$

$$\text{अ} = \frac{v - १}{v^n - १} \times \text{म} = \frac{v - १}{v^n - १} \times v v^n$$

$$n = \frac{\text{ला०म} - \text{ला०व}}{\text{ला०च}} = \frac{\text{मच} - \text{म} + \text{अ}}{\text{ला०च}}$$

$$\text{ला०च} = \frac{\text{ला०म} - \text{ला०व}}{n}$$

$$r = \left(\frac{1}{\frac{1}{r}} - \frac{1}{\frac{1}{r}} \right) \times \frac{\text{अ}}{\frac{1}{r}-1}$$

त्या शेवटील समीकरणांत r भविष्यप्राप्तीची वर्तमान किंमत p वर्षानंतर आहे, ती दाखवितो. आणि हें त्याप्रमाणें उत्पन्न होतें कीं,

त्या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून त्यांत p आणि n वर्षे लिहावीं.

$$\text{म्हणजे } \frac{\frac{1}{r}-1}{\frac{1}{r}-1} \times \frac{\text{अ}}{\frac{1}{r}} - \frac{\frac{1}{r}-1}{\frac{1}{r}-1} \times \frac{\text{अ}}{\frac{1}{r}}$$

परंतु कोणतेही प्राप्तीचें व्याजमुद्दल आणि वर्तमान किंमत कितीएक वर्षांची २१ वर्षेपर्यंत त्या पुढील दोन सारणी कोष्टकांचे साहाय्यानें निघेल.

२६६
दुसरे कोष्टक.

| एक रुपयाचे प्राप्तीची चक्रवाटव्या जातें वर्तमान किंमत | | | | | | |
|---|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| वर्ष | दरशेंकडा रुपये ३३ | दरशेंकडा रुपये ३३ | दरशेंकडा रुप० ४३ | दरशेंकडा रुप० ४३ | दरशेंकडा रु० ५३ | दरशेंकडा रु० ६३ |
| १ | ०'९७०९ | ०'९६६२ | ०'९६१५ | ०'९५६९ | ०'९५२४ | ०'९४७४ |
| २ | १'९१३५ | १'८९९७ | १'८८६१ | १'८७२७ | १'८५९४ | १'८४६० |
| ३ | २'८२८६ | २'८०१६ | २'७७५१ | २'७४८० | २'७२३३ | २'६९७० |
| ४ | ३'७१७१ | ३'६७३१ | ३'६२९९ | ३'५८७५ | ३'५४६० | ३'५०५१ |
| ५ | ४'५७९७ | ४'५१५१ | ४'४५१८ | ४'३९०० | ४'३२९५ | ४'२७२४ |
| ६ | ५'४१७२ | ५'३२८६ | ५'२४२१ | ५'१५७९ | ५'०७५७ | ५'०१७३ |
| ७ | ६'२३०३ | ६'११४५ | ६'००२० | ५'८९२७ | ५'७८६४ | ५'६८२४ |
| ८ | ७'०१९७ | ६'८७४० | ६'७३२७ | ६'५९५९ | ६'४६३२ | ६'३२९८ |
| ९ | ७'७८६१ | ७'६०७७ | ७'४३५३ | ७'३६८८ | ७'२९७८ | ७'२२७७ |
| १० | ८'५३०० | ८'३१६६ | ८'११०९ | ७'९१२७ | ७'७२१७ | ७'६३०१ |
| ११ | ९'२५२६ | ९'०११६ | ८'७६०५ | ८'५२८९ | ८'३०५४ | ८'१८६९ |
| १२ | ९'९५४० | ९'६६३३ | ९'३८५१ | ९'११८६ | ८'८६३३ | ८'७८३८ |
| १३ | १०'६३५० | १०'३०२७ | ९'९८५७ | ९'६८९९ | ९'३९३६ | ९'१०५० |
| १४ | ११'३८६१ | १०'९९०५ | १०'५६३१ | १०'२२२८ | ९'८९८६ | ९'६२९० |
| १५ | ११'८३७९ | ११'५१७४ | ११'११८४ | १०'७३८६ | १०'३३८६ | ९'९१२३ |
| १६ | १२'५६११ | १२'०९४१ | ११'६५२३ | ११'२३४० | १०'८३७५ | १०'४०५९ |
| १७ | १३'१६६१ | १२'६५१३ | १२'१६५७ | ११'७०७२ | ११'२७४१ | १०'४७७३ |
| १८ | १३'७५३५ | १३'१८९७ | १२'६५९३ | १२'१६०० | ११'६८९६ | १०'८२७६ |
| १९ | १४'३२३८ | १३'७७८८ | १३'१३३९ | १२'५९३७ | १२'०८५३ | ११'१५८१ |
| २० | १४'८७०५ | १४'२१२४ | १३'५९०३ | १३'००७९ | १२'४६२२ | ११'४६९९ |
| २१ | १५'४११० | १४'६९८० | १४'०२९२ | १३'४०४७ | १२'८२१२ | ११'७६४१ |

कोणतेही प्राप्तीचे कितीएक सांगितले वर्षांचें सांगितले व्याजाचे दरानें व्याजमुद्दल काढायचें.

प्रथम कोष्टकांतून सांगितले वर्षांचें सांगितले व्याजाचे दरानें एक रुपयाचें व्याजमुद्दल काढावें. आणि तें सांगितले प्राप्तीनें गुणाचें. तो गुणाकार सांगितले प्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें त्या दरानें व्याजमुद्दल होईल. त्याची उलट केली असतां वर्षे आणि दर निघेल.

उदाहरण, ५०० रुपये दरवर्षाची प्राप्ती. कांहीं निमित्ता नें २० वर्षेपर्यंत बंद राहिली असतां चक्रवाटव्याज दरशेंकड दरसाल रुपये ३३ प्रमाणें तितक्या वर्षांचें व्याजमुद्दल किती होईल ?

आतां प्रथम कोष्टकांत वर्षांखाली २० चे ओबींत रुपये ३३ चे दरखालीं एक रुपयाचें व्याजमुद्दल २० २७९७ आहे तें ५०० शें त्यांनीं गुणून झाला गुणाकार १४१३९.८५ हा किंवा १४१३९ रुपये ३ पावले ४० रेस हें इच्छिलें व्याजमुद्दल हें उत्तर

कोणतेही सांगितले प्राप्तीचीं सांगितलीं वर्षेपर्यंत सांगितले दरानें वर्तमानकिंमत काढायची.

दुसरे कोष्टकांतून पूर्वप्रमाणें एक रुपयाची वर्तमान

किंमत क़ाद्रावी . आणि ती सांगितले प्राप्तीने गुणावी . तो गुणा कार सांगितले प्राप्तीची सांगितलीं वर्षेपर्यंत सांगितले दरानें वर्तमान किंमत होईल .

उदाहरण , ५०० रुपये दरवर्षाची प्राप्ति वर्षे २० पर्यंत चालणार तिची दरसाल दरशेंकडा रुपये ३२ चक्रवाट व्याज ह्या दरानें वर्तमान किंमत काय होईल ?

आतां दुसरे कोष्टकांत वर्षांखाली २० चे ओळींत रुपये ३३ चे दरखाली एक रुपयाची वर्तमान किंमत १४२१२४ आहे ती ५०० ह्यांनीं गुणून झाला गुणाकार ७१०६२ हा किंवा ७१०६ रुपये ० पावले ८० रेस ही इच्छिली वर्तमान किंमत आहे हे उत्तर .

दुसरे, आजपासून १० वर्षांनंतर प्रतिवर्षी २०० रुपये प्राप्ति चालू होणार . ती त्या दिवसापासून ११ वर्षेपर्यंत चालेल . अथवा आजपासून २१ वर्षांनीं बंद होईल . तर त्या प्राप्तीची वर्तमानकिंमत दरशेंकडा दरवर्षास ४ रुपये चक्रवाट व्याजाचे दरानें काय होईल ?

ह्यासारखे उदाहरणांन दोन मुदतींच्या बरोबर दोन प्राप्तींच्या वर्तमान किंमती काढून त्याची वजाबाकी करावी . म्हणजे त्याप्रमाणें होते .

दुसरे कोष्टकांतून काढिले दोन किंमतींची वजाबाकी करावी, आणि ती बाकी सांगितले प्राप्तीने गुणावी, तो गुणाकार इच्छिली वर्तमान किंमत होईल.

| | |
|---|------------------|
| जसं कोष्टकांत २१ वर्षांची वर्तमान किंमत | १४.०२९२ |
| आणि १० वर्षांची वर्तमान किंमत | ८.११०९ |
| त्यांची वजाबाकी | <u>५.९१८३</u> |
| | २०० |
| | <u>११८३.६६००</u> |
| | ४ |
| | <u>२.६४००</u> |
| | १०० |
| | <u>६४.००००</u> |

नर ११८३ रुपये २ पाचले ६४ रेस, इच्छिली वर्तमान किंमत, हें उत्तर.